Correction de quelques exercices de la feuille de TD 7

I Exemple d'illustration du cours

Exercice 1. Rappelons que l'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Notons

- I_0 l'ensemble des suites réelles de terme initial nul.
- M l'ensemble des suites réelles majorées.
- B l'ensemble des suites réelles bornées.
- L l'ensemble des suites réelles convergentes.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, L_k l'ensemble des suites réelles qui convergent vers un réel de $[k, k+1[$.
- C l'ensemble des suites réelles croissantes.
- G l'ensemble des suites géométriques.

1) Écrire ces ensembles en compréhension, ainsi que l'ensemble $\overline{L}$.
2) Montrer que $B \subsetneq M$, $L \subsetneq B$, $(C \cap M) \subsetneq L$.
3) Décrire $L \cap G$.
4) Montrer que la famille $(L_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une partition de L.
5) a) L'application $\varphi \;:\; \begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array}$ est-elle surjective ? injective ? bijective ?

   b) L'application $\psi \;:\; \begin{array}{ccc} G \cap \overline{I}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ est-elle surjective ? injective ? bijective ?

Correction : Nous n'avons pas montré la question 4 en classe. Faisons-le ici :

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite constante $(k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $k \in [k, k+1[$ donc elle appartient à L_k. Ainsi $L_k \neq \varnothing$.
- Soient k et p dans $\mathbb{Z}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L_k \cap L_p$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge à la fois vers un réel de $[k, k+1[$ et vers un réel de $[p, p+1[$. Par unicité de la limite d'une suite convergente, cette limite est la même. Cela n'est possible que si $k = p$. Ainsi $L_k \cap L_p = \varnothing$ dès que $k \neq p$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$. Puisque $\ell \in \big[\lfloor \ell \rfloor, \lfloor \ell \rfloor + 1\big[$, nous obtenons que $\ell \in L_{\lfloor \ell \rfloor} \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} L_k$. Nous en déduisons que $L \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} L_k$. L'implication réciproque est immédiate. D'où $L = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} L_k$.

Ainsi $(L_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une partition de L

II Ensembles

Exercice 5. Soit E un ensemble. Montrer que, pour toutes parties A, B et D non vides de E, on a :

1) $\big(A \cup B = B \cap D\big) \;\Rightarrow\; \big(A \subset B \subset D\big)$.
2) $\big(\overline{A} \subset B\big) \;\Leftrightarrow\; \big(A \cup B = E\big)$.
3) $\left.\begin{array}{c} A \cup B = A \cup D \\ A \cap B = A \cap D \end{array}\right\} \;\Leftrightarrow\; B = D$.
4) $(A \cup B \cup D) \cap (A \cup B \cup \overline{D}) \cap (A \cup D \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap D)$.
5) $A \backslash B = \overline{B} \backslash \overline{A}$.
6) $A \backslash (B \cap D) = (A \backslash B) \cup (A \backslash D)$.
7) $\big((A \times B) \cup (B \times A) = D^2\big) \;\Leftrightarrow\; \big(A = B = D\big)$.

Correction :

3) - Supposons que $A \cup B = A \cup D$ et $A \cap B = A \cap D$.
   Donnons-nous $x \in B$.
     - Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B = A \cap D$ et donc, en particulier, $x \in D$.
     - Si $x \notin A$, alors $x \in A \cup B = A \cup D$ et donc $x \in D$.

   Dans les deux cas, on a $x \in D$. Ainsi $B \subset D$. De même, on montre que $D \subset B$ et donc $B = D$.
   - Réciproquement, si $B = D$, alors il est immédiat que $A \cup B = A \cup D$ et $A \cap B = A \cap D$.
4) En utilisant la distributivité de l'union sur l'intersection

$$\begin{aligned}(A \cup B \cup D) \cap (A \cup B \cup \overline{D}) \cap (A \cup D \cup \overline{B}) &= \Big((A \cup B) \cup (D \cap \overline{D})\Big) \cap (A \cup D \cup \overline{B}) \\ &= \Big((A \cup B) \cup \varnothing\Big) \cap (A \cup D \cup \overline{B}) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup D \cup \overline{B}) \\ &= A \cup \Big(B \cap (D \cup \overline{B})\Big) \\ &= A \cup \Big((B \cap D) \cup (B \cap \overline{B})\Big) \\ &= A \cup \Big((B \cap D) \cup \varnothing\Big) = A \cup (B \cap D).\end{aligned}$$

5) On a $A \backslash B = A \cap \overline{B} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{B} = \overline{B} \cap \overline{\overline{A}} = \overline{B} \backslash \overline{A}$.
6) On a $A \backslash (B \cap D) = A \cap \overline{B \cap D} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{D}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{D}) = (A \backslash B) \cup (A \backslash D)$.
7) - Supposons que $(A \times B) \cup (B \times A) = D^2$.
   Donnons-nous $x \in A$ et $y \in B$. On a $(x, y) \in A \times B \subset (A \times B) \cup (B \times A) = D^2$ donc $x \in D$ et $y \in D$. Ainsi $A \subset D$ et $B \subset D$.
   Réciproquement si $x \in D$, alors $(x, x) \in D^2$ donc $(x, x) \in A \times B$ ou $(x, x) \in B \times A$. Ainsi $x \in A$ et $x \in B$. Nous en déduisons que $D \subset A$ et $D \subset B$.
   Ainsi $A = B = D$.
   - Réciproquement si $A = B = D$, alors il est immédiat que $(A \times B) \cup (B \times A) = D^2$.

Exercice 6. Soit E un ensemble. Si A et B sont deux parties de E, on note $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ leur différence symétrique.

1) Déterminer $A \Delta A$ et $A \Delta \varnothing$.
2) Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
3) Montrer que $\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})$.
4) Soit D une partie de A. Montrer que $A \Delta B = A \Delta D$ si et seulement si $B = D$.

Correction :

1) On a $A \Delta A = (A \backslash A) \cup (A \backslash A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$ et $A \Delta \varnothing = (A \backslash \varnothing) \cup (\varnothing \backslash A) = A \cup \varnothing = A$.
2) En utilisant la distributivité de l'union sur l'intersection,

$$\begin{aligned}A \Delta B &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= \Big((A \cap \overline{B}) \cup B\Big) \cap \Big((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}\Big) \\ &= \Big((A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)\Big) \cap \Big((A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})\Big) \\ &= (A \cup B) \cap E \cap E \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{B \cap A}) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).\end{aligned}$$

3) D'après la question précédente,

$$\overline{A\Delta B} = \overline{(A\cup B)\cap(\overline{B\cap A})} = (\overline{A\cup B})\cup(A\cap B).$$

4) Si $B = D$, alors $A\Delta B = A\Delta D$. Réciproquement, supposons que $A\Delta B = A\Delta D$.
Soit $x\in B$. On a alors $x\in A\cup B$.
   - Si $x\in A$, alors $x\in A\cap B$ et donc $x\notin A\Delta B$. Ainsi $x\notin A\Delta D$. Comme $x\in A$, $x\in A\cup D$ et donc $x\in A\cap D$. Nous en déduisons que $x\in D$.
   - Si $x\notin A$, alors $x\notin A\cap B$ et donc $x\in A\Delta B$. Ainsi $x\in A\Delta D$. Comme $x\notin A$, $x\notin A\cap D$ et donc $x\in A\cup D$. Nous en déduisons que $x\in D$.

   Ainsi $B\subset D$. On montre de même que $D\subset B$.

Exercice 8. Expliciter

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[,\qquad \bigcap_{p=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{p},\frac{2p+1}{p}\right[\qquad \text{et}\qquad \bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left[-k,-\frac{1}{k}\right[\cup\left]\frac{1}{k},k\right]\right).$$

Correction :

- Montrons que $\displaystyle\bigcap_{p=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{p},\frac{2p+1}{p}\right[= [0,2]$.
  - Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $[0,2]\subset\left[-\dfrac{1}{p},2+\dfrac{1}{p}\right[$. Ainsi $[0,2]\subset\displaystyle\bigcap_{p=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{p},\frac{2p+1}{p}\right[$.
  - Réciproquement, donnons-nous $x\in\displaystyle\bigcap_{p=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{p},\frac{2p+1}{p}\right[$. Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{p}\leqslant x<2+\dfrac{1}{p}$. En passant à la limite dans l'inégalité, on obtient $0\leqslant x\leqslant 2$. Ainsi $\displaystyle\bigcap_{p=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{p},\frac{2p+1}{p}\right[\subset[0,2]$.
- Montrons que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left[-k,-\frac{1}{k}\right[\cup\left]\frac{1}{k},k\right]\right) = \mathbb{R}^*$.
  - Si $x\in\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left[-k,-\frac{1}{k}\right[\cup\left]\frac{1}{k},k\right]\right)$, alors il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $-k\leqslant x<-\dfrac{1}{k}$ ou $\dfrac{1}{k}\leqslant x\leqslant k$. En particulier $x\in\mathbb{R}^*$.
  - Réciproquement, donnons-nous $x\in\mathbb{R}^*$. La suite $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 et la suite $(k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ donc il existe $k_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{k_0}<|x|\leqslant k_0$. Ainsi $\mathbb{R}^*\subset\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left[-k,-\frac{1}{k}\right[\cup\left]\frac{1}{k},k\right]\right)$.

III Applications

Exercice 9. Dire si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives (auquel cas déterminer la bijection réciproque) :

1) $f : k \in \mathbb{N} \longmapsto 5k+1 \in \mathbb{N}^*$,
2) $g : x \in \mathbb{R}\backslash\{5\} \longmapsto \dfrac{3+2x}{x-5} \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$,
3) $h : y \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{y^2+y+1} \in \mathbb{R}_+$,
4) $\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{e^t-1}{e^t+1} \in \mathbb{R}$,
5) $\psi : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (s+2t, 5t-3s) \in \mathbb{R}^2$,
6) $\Lambda : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (6u-10v, -3u+5v) \in \mathbb{R}^2$,
7) $F : \begin{array}{ccc}]0,3] & \longrightarrow & [0,2[\\ z & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{4-z}{2} & \text{si} \quad z \in]0,2[, \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad z \in [2,3]. \end{cases} \end{array}$

Correction :

1) L'application f est injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ mais elle n'est pas surjective (2 n'admet pas d'antécédent).
2) L'application g est bijective de $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Son application réciproque est

$$g^{-1} : y \in \mathbb{R}\backslash\{2\} \longmapsto \frac{3+5y}{y-2} \in \mathbb{R}\backslash\{5\}.$$

3) L'application h est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y^2+y+1 \geqslant 0$.
   - Un calcul simple de discriminant montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y^2+y+1 > \dfrac{1}{2}$ si bien que $h(y) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi les réels de $\big]0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\big]$ n'admettent pas d'antécédent par h. Elle n'est donc pas surjective.
   - On a $h(-4) = h(3) = \sqrt{13}$ donc h n'est pas injective non plus.
4) L'application φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t+1 \neq 0$.
   - Soit $(t,u) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(t) = \varphi(u)$. On a alors $(e^t-1)(e^u+1) = (e^u-1)(e^t+1)$ donc $e^{t+u}+e^t-e^u-1 = e^{t+u}-e^t+e^u-1$. Nous en déduisons que $e^t = e^u$. Puisque $\exp$ est bijective, nous obtenons que $t = u$. D'où l'injectivité de φ.
   - Par contre φ est bornée par 1 donc par exemple 2 n'admet pas d'antécédent par φ. Ainsi φ n'es pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   Il s'agit d'une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Nous avons étudié $t \mapsto \varphi(2t)$ dans le DS n^o 1.
5) L'application ψ est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Son application réciproque est

$$\psi^{-1} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \left(\frac{5x-2y}{11}, \frac{3x+y}{11}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

6) On a $\Lambda(0,0) = \Lambda(5,3) = 0$ donc Λ n'est pas injective. Par ailleurs $(1,0)$ n'admet pas d'antécédent. En effet si $\Lambda(u,v) = (1,0)$ pour un certain $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, alors $-3u+5v = 0$ et $1 = 6u-10v = -2(3u-5v) = 0$, ce qui est absurde. Nous en déduisons que Λ n'est pas surjective.

   Remarquons que, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\Lambda(u,v) = (5v-3u)\big(-2,1\big)$. Cela signifie que l'image de $\mathbb{R}^2$ par Λ est la droite du plan de vecteur directeur $(-2,1)$.
7) L'application F est une bijection de $]0,3]$ sur $[0,2[$. Sa réciproque est

$$F^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,2[& \longrightarrow &]0,3] \\ y & \longmapsto & \begin{cases} 2+\sqrt{y} & \text{si} \quad y \in [0,1], \\ 4-2y & \text{si} \quad y \in]1,2[. \end{cases} \end{array}$$

Exercice 11. Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (j,k) & \longmapsto & 2^j(2k+1) \end{array}$ est une bijection. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Remarque : ce résultat combiné avec l'exercice précédent entraîne que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection.

Correction :

- La surjectivité est immédiate si on utilise le théorème de décomposition en facteurs premiers (elle est d'ailleurs très intuitive : on divise un entier non nul par 2 jusqu'à ce qu'on obtienne un nombre impair et cela fait apparaître son antécédent par f). Proposons une preuve directe (*qui sort du cadre du programme, mais qui est à votre portée puisqu'elle n'utilise que des résultats du programme*) : Donnons-nous $n \in \mathbb{N}^*$.
  - Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Par conséquent $f(0,k) = n$. Cela signifie que n admet $(0,k)$ pour antécédent par f.
  - Si n est pair, introduisons l'ensemble $E_n = \{j \in \mathbb{N}^* \mid \exists c \in \mathbb{N}^*,\, n = 2^j c\}$. Il s'agit d'une partie de $\mathbb{N}$ non vide (elle contient 1 puisque n est pair) et majorée (par $\left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$). Par conséquent elle admet un maximum $j_0 \in \mathbb{N}$. Puisque $j_0 \in E_n$, il existe $c_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2^{j_0} c_0$. Si c_0 est pair alors 2^{j_0+1} divise n ; ce qui contredit le fait que j_0 est le maximum de E_n. Par conséquent c_0 est impair : il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $c_0 = 2k_0 + 1$. Le coupe d'entiers (j_0, n_0) est donc un antécédent de n par f.
- Soient $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ et $(j',k') \in \mathbb{N}^2$ tels que $f(j,k) = f(j',k')$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $j \neq j'$ (par exemple $j > j'$). On a alors $2^{j-j'}(2k+1) = (2k'-1)$. Puisque $2^{j-j'}$ est un multiple de 2, nous obtenons que le nombre $2k'+1$ est à la fois pair et impair. C'est absurde. Ainsi $j = j'$ et donc $2k+1 = 2k'-1$, ce qui entraîne que $k = k'$. Ainsi f est injective.

Exercice 13. Soient E, F et G des ensembles. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

1) Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective. Qu'en est-il de g ?
2) Supposons que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective. Qu'en est-il de f ?

Correction :

1) Supposons que $g \circ f$ soit injective. Soit $(x,x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. On a alors $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Puisque $g \circ f$ est injective, on en déduit que $x = x'$. Ainsi f est injective.

   Par contre g n'est pas injective a priori. Par exemple, considérons $f_0 : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ et $g_0 : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$. Les applications f_0 et $g_0 \circ f_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ sont injectives. Par contre g_0 ne l'est pas.
2) Supposons que $g \circ f$ soit surjective. Soit $z \in G$. Il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$. Cela signifie que $y = f(x)$ est un antécédent de z par g. Ainsi g est surjective.

   Par contre f n'est pas injective a priori. Par exemple, les applications g_0 et $g_0 \circ f_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ sont surjectives. Par contre f_0 ne l'est pas.