Feuille d'exercice n° 7

Ensembles et applications

I Exemple d'illustration du cours

Exercice 1. Rappelons que l'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Notons

— I_0 l'ensemble des suites réelles de terme initial nul.
— M l'ensemble des suites réelles majorées.
— B l'ensemble des suites réelles bornées.
— L l'ensemble des suites réelles convergentes.
— Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, L_k l'ensemble des suites réelles qui convergent vers un réel de $[k, k+1[$.
— C l'ensemble des suites réelles croissantes.
— G l'ensemble des suites géométriques.

1) Écrire ces ensembles en compréhension, ainsi que l'ensemble $\overline{L}$.
2) Montrer que $B \subsetneq M$, $L \subsetneq B$, $(C \cap M) \subsetneq L$.
3) Décrire $L \cap G$.
4) Montrer que la famille $(L_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une partition de L.
5) a) L'application $\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array}$ est-elle surjective ? injective ? bijective ?

   b) L'application $\psi \ : \ \begin{array}{ccc} G \cap \overline{I}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ est-elle surjective ? injective ? bijective ?

II Ensembles

Exercice 2. Soit $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$ l'ensemble des chiffres du système hexadécimal. Considérons les trois parties : $X = \{A,B,E,F\}$, $Y = \{0,2,4,6,8,A,C,E\}$ et $Z = \{3,5,7,9\}$. Donner en extension les parties

$$\overline{X}, \quad \overline{Y}, \quad \overline{Z}, \quad X \cap Y, \quad Y \cup \overline{X}, \quad X \backslash Z, \quad \left(\overline{(\overline{Y} \cap X) \cup Z}\right) \backslash Y.$$

Exercice 3. Donner en extension l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ quand E est l'un des ensembles suivants

$$\mathcal{P}(\varnothing), \qquad \{a, \{b\}\}, \qquad \{\diamondsuit, \heartsuit\}, \qquad \big\{0, \{0\}, \{\{0\}\}\big\}, \qquad \{\Lambda, 0, *\}, \qquad \{A, C, G, T\}$$

Exercice 4. Soit $E = \{0, 1, \{0\}, \{0,1\}\}$. Parmi les propositions suivantes, dites lesquelles sont vraies :

$$\{0\} \in E, \quad \{0\} \in \mathcal{P}(E), \quad \{\{1\}\} \subset E, \quad \{0,1\} \subset E, \quad \{\{0\}, 0\} \subset \mathcal{P}(E)$$
$$\{\{0\}, \varnothing\} \in \mathcal{P}(E), \quad \{\{1, \{0,1\}\}, \{0\}, E\} \subset \mathcal{P}(E), \quad \{\{\{0,1\}\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)).$$

Exercice 5. Soit E un ensemble. Montrer que, pour toutes parties A, B et D non vides de E, on a :

1) $\big(A \cup B = B \cap D\big) \ \Rightarrow \ \big(A \subset B \subset D\big)$.
2) $\big(\overline{A} \subset B\big) \ \Leftrightarrow \ \big(A \cup B = E\big)$.
3) $\left.\begin{array}{l} A \cup B = A \cup D \\ A \cap B = A \cap D \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ B = D$.
4) $(A \cup B \cup D) \cap (A \cup B \cup \overline{D}) \cap (A \cup D \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap D)$.
5) $A \backslash B = \overline{B} \backslash \overline{A}$.
6) $A \backslash (B \cap D) = (A \backslash B) \cup (A \backslash D)$.
7) $\big((A \times B) \cup (B \times A) = D^2\big) \ \Leftrightarrow \ \big(A = B = D\big)$.

Exercice 6. Soit E un ensemble. Si A et B sont deux parties de E, on note $A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ leur différence symétrique.

1) Déterminer $A\Delta A$ et $A\Delta\varnothing$.
2) Montrer que $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$.
3) Montrer que $\overline{A\Delta B} = (A\cap B)\cup(\overline{A\cup B})$.
4) Soit D une partie de A. Montrer que $A\Delta B = A\Delta D$ si et seulement si $B = D$.

Exercice 7. Décrire géométriquement l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\leqslant 1\}$. Montrer qu'il ne s'agit pas du produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Expliciter

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[,\qquad \bigcap_{p=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{p},\frac{2p+1}{p}\right[\qquad\text{et}\qquad \bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left[-k,-\frac{1}{k}\right[\cup\left]\frac{1}{k},k\right]\right).$$

III Applications

Exercice 9. Dire si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives (auquel cas déterminer la bijection réciproque) :

1) $f : k\in\mathbb{N}\longmapsto 5k+1\in\mathbb{N}^*$,
2) $g : x\in\mathbb{R}\backslash\{5\}\longmapsto \dfrac{3+2x}{x-5}\in\mathbb{R}\backslash\{2\}$,
3) $h : y\in\mathbb{R}\longmapsto\sqrt{y^2+y+1}\in\mathbb{R}_+$,
4) $\varphi : t\in\mathbb{R}\longmapsto\dfrac{e^t-1}{e^t+1}\in\mathbb{R}$,
5) $\psi : (s,t)\in\mathbb{R}^2\longmapsto(s+2t, 5t-3s)\in\mathbb{R}^2$,
6) $\Lambda : (u,v)\in\mathbb{R}^2\longmapsto(6u-10v,-3u+5v)\in\mathbb{R}^2$,
7) $F : \begin{array}{ccc}]0,3] & \longrightarrow & [0,2[\\ z & \longmapsto & \begin{cases}\dfrac{4-z}{2} & \text{si } z\in\,]0,2[,\\ (x-2)^2 & \text{si } z\in[2,3].\end{cases}\end{array}$

Exercice 10. Montrer que les exemples suivants sont en bijection (on explicitera une telle bijection) :

1) $[0,1]$ et $[a,b]$ (avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$),
2) $]0,1]$ et $[a,+\infty[$ (avec $a\in\mathbb{R}_+$),
3) $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers naturels pairs,
4) $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers naturels impairs,
5) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$,
6) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$,
7) $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$,
8) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$.

Exercice 11. Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc}\mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^*\\ (j,k) & \longmapsto & 2^j(2k+1)\end{array}$ est une bijection. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Remarque : ce résultat combiné avec l'exercice précédent entraîne que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection.

Exercice 12. Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E\longrightarrow F$ et $g : E\longrightarrow G$ des applications. Considérons l'application $h : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F\times G\\ x & \longmapsto & (f(x),g(x))\end{array}$.

1) Montrer que si f ou g sont injectives, alors h aussi. La réciproque est-elle vraie ?
2) Montrer que si h est surjective, alors f et g aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 13. Soient E, F et G des ensembles. Soient $f\in F^E$ et $g\in G^F$.

1) Supposons que $g\circ f$ est injective. Montrer que f est injective. Qu'en est-il de g ?
2) Supposons que $g\circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective. Qu'en est-il de f ?