Correction de quelques exercices de la feuille de TD 6

I Convergence de suites réelles

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

1) Si $\ell < 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2) Si $\ell > 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.
3) Que dire sur la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $\ell = 1$?

Correction :

1) Supposons que $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0,1[$. Comme $\ell \leqslant \dfrac{\ell+1}{2}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 < \sqrt[n]{u_n} \leqslant \dfrac{1+\ell}{2}$ et donc $0 < u_n \leqslant \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n$.

   Puisque $\left|\dfrac{\ell+1}{2}\right| < 1$, on a $\left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, nous obtenons alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2) Supposons que $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell > 1$. Comme $\ell \geqslant \dfrac{1+\ell}{2}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \geqslant \dfrac{1+\ell}{2}$ et donc $u_n \geqslant \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n$.

   Puisque $\dfrac{\ell+1}{2} > 1$, on a $\left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par encadrement, nous obtenons alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

3) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 1$, alors on ne peut rien dire a priori. En effet, par exemple :
   - Regardons le cas où $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissances comparées, on a $\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $n^{1/n} = \exp\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. De plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $+\infty$.

     Ici on a utilisé le fait que, si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite $(e^{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Une façon de montrer cela est de se rappeler que $e^x \geqslant 1+x$ pour tout x réel. Par conséquent, pour tout n assez grand (pour que $1 > x_n$), $1 + x_n \leqslant e^{x_n} \leqslant \dfrac{1}{1-x_n}$. D'où la convergence par encadrement.

   - Regardons le cas où $u_n = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a $n^{-1/n} = \dfrac{1}{n^{1/n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par contre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée la série harmonique.

1) Déterminer une constante c strictement positive telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{2n} - H_n \geqslant c$.
2) Déterminer la nature de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sa limite éventuelle.

Correction :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons
$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = c,$$
avec $c = 1/2 > 0$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ donc la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Si elle est majorée, alors elle admet une limite finie ℓ. En particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} H_{2n} = \ell$ et donc, en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $\ell - \ell \geqslant c$. C'est absurde. Ainsi la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée et donc elle tend vers $+\infty$, d'après le théorème de la limite monotone.

Exercice 7. Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

Correction : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers qui converge vers une limite finie ℓ. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{4}$, c'est-à-dire $\ell - \dfrac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant \ell + \dfrac{1}{4}$. L'intervalle $\left[\ell - \dfrac{1}{4}, \ell + \dfrac{1}{4}\right]$ est d'amplitude $\dfrac{1}{2}$ donc il contient au plus un entier (et il en contient au moins un : l'entier u_{n_0}). Pour tout $n \geqslant n_0$, u_n est un entier qui appartient à cet intervalle donc $u_n = u_{n_0}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

II Suites récurrentes