Feuille d'exercice n° 6

Suites de nombres réels (2)

I Convergence de suites réelles

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0.3$, $u_2 = 0.33$, $u_3 = 0.333$, $u_4 = 0.3333...$ et de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0.\underbrace{33333\cdots333}_{n \text{ fois}}$. Montrer que la suite converge vers un réel que l'on précisera.

Exercice 2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire les limites des suites de termes généraux :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs et telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Application aux suites sous-géométriques : Soient $q \in]0,1[$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant q a_n$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 4. Soient a_0 et b_0 deux réels strictement positifs tels que $a_0 \leqslant b_0$. Nous définissons deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les réels a_n et b_n sont bien définies et vérifient $0 < a_n \leqslant b_n$.
2) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   On pourra montrer que la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-géométrique et utiliser le résultat de l'exercice 3.
3) Écrire un programme `Scilab` qui prend en entrée a_0, b_0, n et renvoie les valeurs de a_n et b_n.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

1) Si $\ell < 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2) Si $\ell > 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.
3) Que dire sur la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $\ell = 1$?

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée la série harmonique.

1) Déterminer une constante c strictement positive telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{2n} - H_n \geqslant c$.
2) Déterminer la nature de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sa limite éventuelle.

Exercice 7. Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

Exercice 8 (suite définie implicitement). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique racine dans $\mathbb{R}^+$, que l'on note x_n.
2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{2} < x_n < 1$.
4) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

II Suites récurrentes

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 3)^2$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2) Étudier les variations de $f : x \in [0, 3] \longmapsto \frac{1}{3}(x - 3)^2$. En déduire les sens de variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites distinctes.
4) Est-ce-que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$.

1) Montrer que, pour que la suite soit bien définie, il faut que $0 \leqslant u_n < 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Étudier les variations de $f : x \in [0, 4[\longmapsto \dfrac{1}{2 - \sqrt{x}}$ ainsi que le signe de $f(x) - x$ pour $x \in [0, 4[$.
3) Remarquer que f admet deux points fixes a et b dans $[0, 4[$, avec $a < b$.
   a) Caractériser la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $u_0 = a$ ou $u_0 = b$.
   b) Supposons que $u_0 \in [0, a[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n < a$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   c) Supposons que $u_0 \in]a, b[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a < u_n < b$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   d) Supposons que $u_0 > b$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée par 4. Qu'en déduit-on ?

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.

1) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et croissante et convergente et déterminer sa limite. Montrer que l'on aboutit à une contradiction et conclure.
2) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = |u_n - 2|$. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_{n+2} \leqslant \dfrac{v_{n+1} + v_n}{3}$.
4) On considère $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_{n_0} = v_{n_0}$, $w_{n_0+1} = v_{n_0+1}$ et, pour tout $n \geqslant n_0$, $w_{n+2} = \dfrac{w_{n+1} + w_n}{3}$.
   a) Comparer les termes v_n et w_n pour tout $n \geqslant n_0$.
   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.