Correction de quelques exercices de la feuille de TD 5

I Suites usuelles

Exercice 1. Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, donner une expression du terme général en fonction de n et étudier les variations.

1) $\begin{cases} u_0 = 4, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{5}, \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}, \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = \dfrac{2}{3}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 4u_n = 2u_{n+1}, \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 7u_{n+1}, \end{cases}$

Correction : Corrigeons le troisième (les autres ont été traités en cours). L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $r^2 - 2r + 4 = 0$. Elle admet -12 pour discriminant. Par conséquent elle admet deux racines complexes $\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ et $2e^{-i\pi/3}$. Par conséquent il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^n \left(\lambda \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).$$

On a $1 = u_0 = \lambda$ et $\dfrac{2}{3} = u_1 = 2\left(\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\mu\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{2}{3} - 1\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{9} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).$$

Exercice 2. Donner une expression explicite du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = -1$, $v_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{u_{n-1}}{6} + 5 \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Correction : Déterminons une solution constante, c'est-à-dire un réel x tel que $x = \dfrac{x}{6} + 5$. On trouve $x = 6$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $t_n = u_n - x$. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad t_{n+1} = u_{n+1} - x = \frac{u_{n-1}}{6} + 5 - \left(\frac{x}{6} + 5\right) = \frac{1}{6}(u_n - x) = \frac{t_n}{6}.$$

La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$ et de terme initial $t_0 = u_0 - 6 = -7$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = t_n + 6 = -\frac{7}{6^n} + 6.$$

Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{7}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^k + \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = -\frac{7}{n}\,\frac{1}{6}\,\frac{1-6^{-n}}{1-6^{-1}} + 6 = 6 - \frac{7}{5n}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right).$$

Exercice 4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = e$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1}u_n$.

Correction : Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On peut donc passer au logarithme dans l'expression de récurrence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \ln(2u_n)$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = \ln(2u_{n+2}) = \ln(4u_{n+1}u_n) = \ln(2u_{n+1}) + \ln(2u_{n+1}) = v_{n+1} + v_n.$$

L'équation caractéristique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $r^2 - r - 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 5 > 0$. Elle admet deux solutions réelles : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Par conséquent il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

On a $\lambda + \mu = v_0 = \ln(2)$ et $\lambda\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = v_1 = \ln(2e) = 1 + \ln(2)$. On calcule que $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-1 + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ln(2)\right)$ et $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(1 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ln(2)\right)$ Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{e^{v_n}}{2} = \frac{1}{2}\exp\left(\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\exp\left(\mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$. On suppose que u_0 est tel que la suite est bien définie. Il s'agit aussi d'une suite homographique. Posons $f : x \in \mathbb{R}\backslash\{3\} \longmapsto \dfrac{x-4}{x-3}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ.
2) On suppose désormais que $u_0 \neq \ell$. Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \dfrac{1}{u_n - \ell}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
4) En déduire une expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction :

1) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$. On a

$$f(x) - x = \frac{x - 4 - x(x-3)}{x-3} = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x-3} = \frac{(x-2)^2}{3-x}.$$

Ainsi $f(x) = x$ si et seulement si $x = 2$.

2) On suppose désormais que $u_0 \neq 2$. Procédons par récurrence pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 2$.
   - *Initialisation :* On a supposé que $u_0 \neq 2$.
   - *Hérédité :* Supposons que $u_n \neq 2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 4}{u_n - 3} - 2 = \frac{-u_n + 2}{u_n - 3} \neq 0.$$

D'où le résultat par récurrence.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{\dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} - 2} = \frac{1}{\dfrac{u_n - 2}{3 - u_n}} = \frac{3 - u_n}{u_n - 2} = \frac{2 - u_n}{u_n - 2} + \frac{1}{u_n - 2} = -1 + v_n.$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison -1. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = v_0 - n = \frac{1}{u_0 - 2} - n.$$

4) Nous en déduisons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2 + \frac{1}{v_n} = 2 + \frac{u_0 - 2}{1 - n(u_0 - 2)}.$$

II Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures

Exercice 9. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b \,|\, a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des réels qui s'écrivent comme la somme d'un réel de A et d'un réel de B. Supposons que A et B soient deux parties majorées. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Correction : Les parties A et B de $\mathbb{R}$ sont non vides et majorées donc elles admettent des bornes supérieures. Pour tous $a \in A$ et $b \in B$, $a \leqslant \sup(A)$ et $b \leqslant \sup(B)$ donc $a + b \leqslant \sup(A) + \sup(B)$. Ainsi la partie $A + B$ est majorée (par $\sup(A) + \sup(B)$) et non vide donc elle admet une borne supérieure. Par ailleurs $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$ donc

$$\forall y \in A + B, \qquad y \leqslant \sup(A) + \sup(B).$$

Ensuite, donnons-nous $\varepsilon > 0$. On a $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \sup(A)$ donc il existe $a \in A$ tel que $a > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. On a aussi $\sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} < \sup(B)$ donc il existe $b \in B$ tel que $b > \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}$. Nous avons donc $a + b > \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$. Nous avons montré que

$$\begin{cases} \forall y \in A + B, \quad y \leqslant \sup(A) + \sup(B), \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A + B, \quad \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < x. \end{cases}$$

Par caractérisation de la borne supérieure, nous obtenons que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

III Convergence de suites réelles

Exercice 12. Étudier la nature des suites de termes généraux suivants et préciser leur éventuelle limite.

18) $-n^3 + \sqrt{n^6 + \sin(10^n)}$
19) $\cos(n)$,
20) $\sin(n)$.

Pour les points 19 et 20, on pourra raisonner par l'absurde.

Correction :

18) Commençons par remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^6 + \sin(10^n) \geqslant 0$ donc $\sqrt{n^6 + \sin(10^n)}$ est bien défini. Pour lever la forme indéterminée (du type $\infty - \infty$), pensons à multiplier par la quantité conjuguée : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-n^3 + \sqrt{n^6 + \sin(10^n)} = \frac{-n^6 + n^6 + \sin(10^n)}{n^3 + \sqrt{n^6 + \sin(10^n)}} = \frac{\sin(10^n)}{n^3} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \sin(10^n)/n^6}}.$$

Nous en déduisons que $| - n^3 + \sqrt{n^6 + \sin(10^n)}| \leqslant \frac{1}{n^3}$. Par encadrement, nous obtenons que $(-n^3 + \sqrt{n^6 + \sin(10^n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

19) Raisonnons par l'absurde et supposons que $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n + 1) + \cos(n - 1) = 2\cos(n)\cos(1)$ donc, en passant à la limite, $2\ell = 2\ell\cos(1)$. Nous obtenons que $\ell = 0$. Par ailleurs $\cos(n) = 2\cos^2(n) - 1$ donc, en passant à la limite, $\ell = 2\ell^2 - 1$. Ainsi $\ell = 1$ ou $\ell = -1/2$. C'est absurde. Ainsi $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge (et elle ne tend pas non plus vers $-\infty$ ou $+\infty$ puisqu'elle est bornée par 1).

20) Raisonnons par l'absurde et supposons que $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(n + 1) - \sin(n - 1) = 2\sin(n)\cos(1)$. En passant à la limite, on obtient que $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, ce qui est absurde. Ainsi $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge (et elle ne tend pas non plus vers $-\infty$ ou $+\infty$ puisqu'elle est bornée par 1).