Feuille d'exercice n° 5

Suites de nombres réels (1)

I Suites usuelles

Exercice 1. Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, donner une expression du terme général en fonction de n et étudier les variations.

1) $\begin{cases} u_0 = 4, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{5}, \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}, \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = \dfrac{2}{3}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 4u_n = 2u_{n+1}, \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 7u_{n+1}, \end{cases}$

Exercice 2. Donner une expression explicite du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = -1$, $v_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{u_{n-1}}{6} + 5 \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Exercice 3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 5u_n + 4v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 4u_n + 5v_n.$$

1) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2) Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
3) En déduire une expression des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = e$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1}u_n$.

Exercice 5 (D'après ESCP). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n.$$

1) Déterminer α pour que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $s_n = \alpha n(-1)^n$, vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_n - s_n$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire son terme général (que l'on exprimera en fonction de v_0 et v_1).
3) En déduire une expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{5u_n + 7}$. On suppose que u_0 est tel que la suite est bien définie. On dit qu'il s'agit d'une suite homographique. Posons $f : x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{7}{5}\} \longmapsto \dfrac{4x+2}{5x+7}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions ℓ et ℓ' (avec $\ell < \ell'$).
2) On suppose désormais que $u_0 \neq \ell$. Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \dfrac{u_n - \ell'}{u_n - \ell}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4) En déduire une expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$. On suppose que u_0 est tel que la suite est bien définie. Il s'agit aussi d'une suite homographique. Posons $f : x \in \mathbb{R}\backslash\{3\} \longmapsto \dfrac{x-4}{x-3}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ.
2) On suppose désormais que $u_0 \neq \ell$. Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \dfrac{1}{u_n - \ell}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
4) En déduire une expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures

Exercice 8. Déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures des parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $A = \{(1 + (-1)^n)e^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{((-1)^{-n} - 1)4^{-n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,

$$C = \left\{ \sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \text{et} \qquad D = \left\{ \frac{1}{1-x} \,\middle|\, x \in \,]1, +\infty[\right\}$$

Exercice 9. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b \,|\, a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des réels qui s'écrivent comme la somme d'un réel de A et d'un réel de B. Supposons que A et B soient deux parties majorées. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 10. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$.

III Convergence de suites réelles

Exercice 11. Étudier la convergence de chaque suite des exercices 1, 2 et 3.

Exercice 12. Étudier la nature des suites de termes généraux suivants et préciser leur éventuelle limite.

1) $\ln(n+1)$,
2) e^{n^α}, $\alpha > 0$,
3) e^{1/n^α}, $\alpha > 0$,
4) $n^{1+\sqrt{n}}$,
5) $\dfrac{(-3)^n}{n^2}$,
6) $\dfrac{e^{-n^2}}{n^3}$,
7) $n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
8) $\dfrac{\ln(n^3)}{n\sqrt{n}}$,
9) $\dfrac{n!}{n^n}$,
10) $\dfrac{8^n}{e^{3n}}$,
11) $2^{2n}e^{-3n}$,
12) $\dfrac{3^n - e^n}{3^n + e^n}$,
13) $\dfrac{\sin(n^n e^{n^3})}{n^{3/2}}$,
14) $\dfrac{1}{n}\ln(n + e^{-n})$,
15) $\dfrac{(-1)^{n^2} + (n+1)^2 + \cos(1-n)}{4n^2 + \sin(\sqrt{n}) + 10n\ln(n)}$,
16) $\sqrt{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^3 - n + 1}$,
17) $\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}} - \sqrt{n + \sqrt{n^2 + 1}}$,
18) $-n^3 + \sqrt{n^6 + \sin(10^n)}$,
19) $\cos(n)$,
20) $\sin(n)$.

Les opérations vues en cours sur les suites admettant des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ joueront un rôle capital dans la résolution de cet exercice. On n'utilisera pas de compositions de limites (nous reverrons des exemples lors du chapitre Limite et continuité*) et on se ramènera plutôt à des minorations ou majorations avec des suites de référence. Certaines inégalités vues dans la feuille d'exercice précédentes pourront être utiles. Pour les points 19) et 20), on pourra raisonner par l'absurde.*