Correction de quelques exercices de la feuille de TD 4

I Trigonométrie

Exercice 2. Donner une valeur de $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$, $\cos(\pi/16)$ et $\sin(\pi/16)$.

Correction : • Nous avons

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{8}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\geqslant 0$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Nous avons aussi

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{8}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\geqslant 0$ et donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

• Nous avons

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{16}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}=\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{16}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\geqslant 0$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$. Nous avons aussi

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{16}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}=\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{16}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\geqslant 0$ et donc $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$.

Exercice 3. Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

1) Exprimer $\cos^3(\theta)\sin(\theta)$ en fonction $\sin(4\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
2) Exprimer $\sin(7\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Correction : Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

1) D'après les formules d'Euler,

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta)\sin(\theta)&=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\\&=\frac{1}{16i}\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\\&=\frac{1}{16i}\left(e^{4i\theta}-e^{-4i\theta}+2e^{2i\theta}-2e^{-2i\theta}\right)\\&=\frac{1}{16i}\left(2i\sin(4\theta)+4i\sin(2\theta)\right)\\&=\frac{1}{8}\sin(4\theta)+\frac{1}{4}\sin(2\theta).\end{aligned}$$

2) On a $\sin(7\theta) = \mathfrak{Im}(\cos(7\theta) + i\sin(7\theta))$. D'après la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, nous avons

$$\begin{aligned}
\cos(7\theta) + i\sin(7\theta) &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^7 \\
&= \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \cos^{7-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta) \\
&= \cos^7(\theta) + 7i\cos^6(\theta)\sin(\theta) - 21\cos^5(\theta)\sin^2(\theta) - 35i\cos^4(\theta)\sin^3(\theta) \\
&\quad + 35\cos^3(\theta)\sin^4(\theta) + 21i\cos^2(\theta)\sin^5(\theta) - 7\cos(\theta)\sin^6(\theta) - i\sin^7(\theta).
\end{aligned}$$

Prenons la partie imaginaire de cette somme :

$$\sin(7\theta) = 7\cos^6(\theta)\sin(\theta) - 35\cos^4(\theta)\sin^3(\theta) + 21\cos^2(\theta)\sin^5(\theta) - \sin^7(\theta).$$

II Conjugués, modules et arguments d'un nombre complexe

Exercice 4. Mettre les complexes suivants sous forme algébrique (c'est-à-dire sous la forme $x + iy$ avec x et y deux réels) :

$$\frac{5-7i}{3-2i}, \qquad \frac{i\sqrt{3}-3}{i-\sqrt{3}}, \qquad (-i)^{2017}, \qquad 2\pi e^{i\pi/8}, \qquad \frac{(i-2)^3 + 2i\sqrt{5} + 9}{(1-i\sqrt{2})^2 + 3}, \qquad j + 2j^2 + 3j^3.$$

Correction :

- On a $\dfrac{5-7i}{3-2i} = \dfrac{(5-7i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{29-11i}{9+4}$.
- On a $\dfrac{i\sqrt{3}-3}{i-\sqrt{3}} = \dfrac{(i\sqrt{3}-3)(-i-\sqrt{3})}{(i-\sqrt{3})(-i-\sqrt{3})} = \dfrac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}$.
- On a $2017 = 2016 + 1 = 4 \times 504 + 1$ si bien que $(-i)^{2017} = \left((-i)^4\right)^{504}(-i) = 1 \times (-i) = -i$.
- On a $2\pi e^{i\pi/8} = 2\pi\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) + i2\pi\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\pi\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + 2i\pi\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
- Je vous laisse le faire.
- On a $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^3 = 1$ donc on trouve $j + 2j^2 + 3j^3 = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument des complexes suivants :

$$\sqrt{3} + i, \qquad -2e^{2i\pi/7}, \qquad e^{2i\theta} + 1, \qquad \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^n, \qquad \left(1 + e^{i\theta}\right)^n, \qquad \frac{1}{(\sqrt{3}+3i)^4}.$$

Correction : La plupart ont été traitées en cours. Occupons-nous du dernier : on a

$$\frac{1}{\sqrt{3}+3i} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{e^{i\pi/3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-i\pi/3}.$$

Ainsi $\dfrac{1}{(\sqrt{3}+3i)^4} = \dfrac{1}{(2\sqrt{3})^4}e^{-4i\pi/3} = \dfrac{1}{144}e^{-4i\pi/3}$.

Exercice 6. Écrire $z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Correction : On a $z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/12}$.

Mais on a aussi $z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{(1+i)((1-i\sqrt{3}))}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} + i\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$.

En prenant les parties réelles, on obtient que $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ et donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

En prenant les parties imaginaires, on obtient que $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$ et donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 9. Soient z et z' deux complexes de module 1 et tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

Correction : On a

$$\frac{z+z'}{1+zz'} - \overline{\frac{z+z'}{1+zz'}} = \frac{z+z'}{1+zz'} - \frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{zz'}} = \frac{(z+z')(1+\overline{zz'}) - (\overline{z}+\overline{z'})(1+zz')}{(1+zz')(1+\overline{zz'})}.$$

Le numérateur est égal à

$$z + z' + z\overline{z}\overline{z'} + \overline{z}z'\overline{z'} - \overline{z} - \overline{z'} - z\overline{z}z' - zz'\overline{z'}.$$

Or par hypothèse $z\overline{z} = |z|^2 = 1$ et $z'\overline{z'} = |z'| = 1$ si bien que le numérateur est égal à

$$z + z' + \overline{z'} + \overline{z} - \overline{z} - \overline{z'} - z' - z = 0.$$

Nous en déduisons que $\dfrac{z+z'}{1+zz'} - \overline{\dfrac{z+z'}{1+zz'}} = 0$ si bien que $\dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

III Calculs de sommes

IV Racines carrées et équations du second degré

V Racines $n^{\text{ièmes}}$