Feuille d'exercice n° 4

Trigonométrie et nombres complexes

I Trigonométrie

Exercice 1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $\cos(3x) - \sin(x) = 0$,
2) $\sin(2x) + \sin(6x) = 0$,
3) $\tan(2x) = 2\tan(x)$,
4) $\sin(7x) + \sin(3x) = \sqrt{3}\sin(5x)$,
5) $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$,
6) $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = -\sqrt{2}$.
7) $\sin(x) \leqslant -\dfrac{1}{2}$.
8) $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) > -1$.
9) $\sin^2(x) + 3\cos(x) < 1$.

Exercice 2. Donner une valeur de $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$, $\cos(\pi/16)$ et $\sin(\pi/16)$.

Exercice 3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Exprimer $\cos^3(\theta)\sin(\theta)$ en fonction $\sin(4\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
2) Exprimer $\sin(7\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

II Conjugués, modules et arguments d'un nombre complexe

Exercice 4. Mettre les complexes suivants sous forme algébrique (c'est-à-dire sous la forme $x + iy$ avec x et y deux réels) :

$$\frac{5-7i}{3-2i}, \qquad \frac{i\sqrt{3}-3}{i-\sqrt{3}}, \qquad (-i)^{2017}, \qquad 2\pi e^{i\pi/8}, \qquad \frac{(i-2)^3 + 2i\sqrt{5} + 9}{(1-i\sqrt{2})^2 + 3}, \qquad j + 2j^2 + 3j^3.$$

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument des complexes suivants :

$$\sqrt{3} + i, \qquad -2e^{2i\pi/7}, \qquad e^{2i\theta} + 1, \qquad \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^n, \qquad \left(1 + e^{i\theta}\right)^n, \qquad \frac{1}{(\sqrt{3}+3i)^4}.$$

Exercice 6. Écrire $z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 7 (formule du parallélogramme). Montrer que, pour tous complexes z et z',

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Pourquoi l'appelle-t-on formule du parallélogramme ?

Exercice 8. On dit qu'un entier n est somme de deux carrés d'entiers si il existe x et y dans $\mathbb{N}$ tels que $n = x^2 + y^2$. Montrer qu'un produit fini de tels entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 9. Soient z et z' deux complexes de module 1 et tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

III Calculs de sommes

Exercice 10. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kz^k$.

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$,
2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a+k\theta)$,
3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$,
4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k \sin(k\theta)$.

IV Racines carrées et équations du second degré

Exercice 12. Déterminer les racines carrées des complexes suivants : i, $1-i$, $5+4i$ et $5\sqrt{3}+2i\sqrt{2}$.

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1$ où $\theta \in \mathbb{R}$,
2) $z^2 + 5iz + 4 = 0$,
3) $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$,
4) $(z-i)^2 = -(z+1-i)^2$.

Exercice 14. Résoudre le système d'équation $\left\{\begin{array}{c} x+y=2 \\ xy=3 \end{array}\right.$, d'inconnues x et y dans $\mathbb{C}$.

V Racines $n^{\text{ièmes}}$

Rappelons que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$, l'équation $z^n = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement n solutions. Les techniques peuvent servir, mais les résultats théoriques sont hors programme.

Exercice 15. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) $z^3 = \dfrac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$,
2) $z^4 = z + \overline{z}$,
3) $\overline{z^7} = \dfrac{1}{z^3}$,
4) $z^3 + 3z - 2i = 0$,
5) $z^6 + z^3 + 1 = 0$,
6) $z^4 = -7 - 24i$,
7) $z^3 - i = 6(z+i)$,
8) $z^n + 2z^{n-1} + 2z^{n-2} + \cdots + 2z^2 + 2z + 1 = 0$.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, posons $\zeta_k = e^{2ik\pi/n}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k^p$ pour $p \in \mathbb{N}$.
Les nombres $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ sont les n racines de $n^{\text{ième}}$ de l'unité, c'est-à-dire les n solutions de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 17. Résoudre de deux façons l'équation $(z+i)^5 = (z-i)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
En déduire que $\tan(\pi/5) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan(2\pi/5) = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.