Correction de quelques exercices de la feuille de TD 3

I Images et antécédents

II Composition de fonctions

III Propriétés globales des fonctions réelles de la variable réelle

Exercice 7. Que dire d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles qui est à la fois monotone et périodique ?

Correction : Montrons qu'une telle fonction est forcément constante sur $\mathbb{R}$.

Soit $T > 0$. Soit f une fonction T-périodique et croissante (le cas décroissant est analogue).

- Si f est constante sur $[0, T]$, alors elle est constante que $\mathbb{R}$ tout entier puisqu'elle est T-périodique.
- Raisonnons par l'absurde : supposons que f n'est pas constante que $[0, T]$ et montrons que cela aboutit à une contradiction. Il existe alors x et y dans $[0, T]$ tels que $x < y$ et $f(x) \neq f(y)$. Puisque f est croissante, nous obtenons que $f(x) < f(y)$. De plus $x + T \geqslant T \geqslant y$ donc la croissance de f entraîne que $f(x+T) \geqslant f(y)$. Ainsi $f(x) \geqslant f(y)$ puisque $f(x+T) = f(y)$. D'où une contradiction. Ainsi f ne peut être que constante que $[0, T]$.

IV Étude de fonctions

Exercice 8. Considérons les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2 + 4x - 6}{2x - 3}$ et $g : x \longmapsto x^2 + 5x + 2$.
Notons $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé.

1) Déterminer les domaines de définition, les variations et les limites des fonctions f et g.
2) Montrer que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(3/2, 5)$ et que $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à la droite $x = -5/2$.
3) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Correction : Pour mener à bien cet exercice, donnons les considérations géométriques suivantes (qui ne sont pas au programme) :

Soient a et b deux réels. La courbe représentative d'une fonction $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est

- *symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $a + x \in D_f$, on a $a - x \in D_f$ et $f(a+x) = f(a-x)$.*
- *symétrique par rapport au point de coordonnées (a, b) si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $a + x \in D_f$, on a $a - x \in D_f$ et $f(a+x) + f(a-x) = 2b$.*

Nous avons $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{2}\}$ et $D_g = \mathbb{R}$. Il suffit donc de vérifier (je vous laisse le faire) que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f\left(\frac{3}{2} - x\right) + f\left(\frac{3}{2} + x\right) = 10$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g\left(-\frac{5}{2} - x\right) = g\left(-\frac{5}{2} + x\right).$$

Exercice 9. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \ln(x^{3/4} - 1)$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Montrer (sans utiliser le théorème de la bijection) que f admet une application réciproque que l'on explicitera.

Correction : La fonction $x \longmapsto x^{3/4} - 1$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, nous avons $x^{3/4} - 1 > 0$ si et seulement si $x > 1$. Puisque $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, nous obtenons que $D_f =]1, +\infty[$.

La fonction $x \longmapsto x^{3/4} - 1$ est dérivable sur D_f et la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous en déduisons que f est dérivable sur D_f. De plus

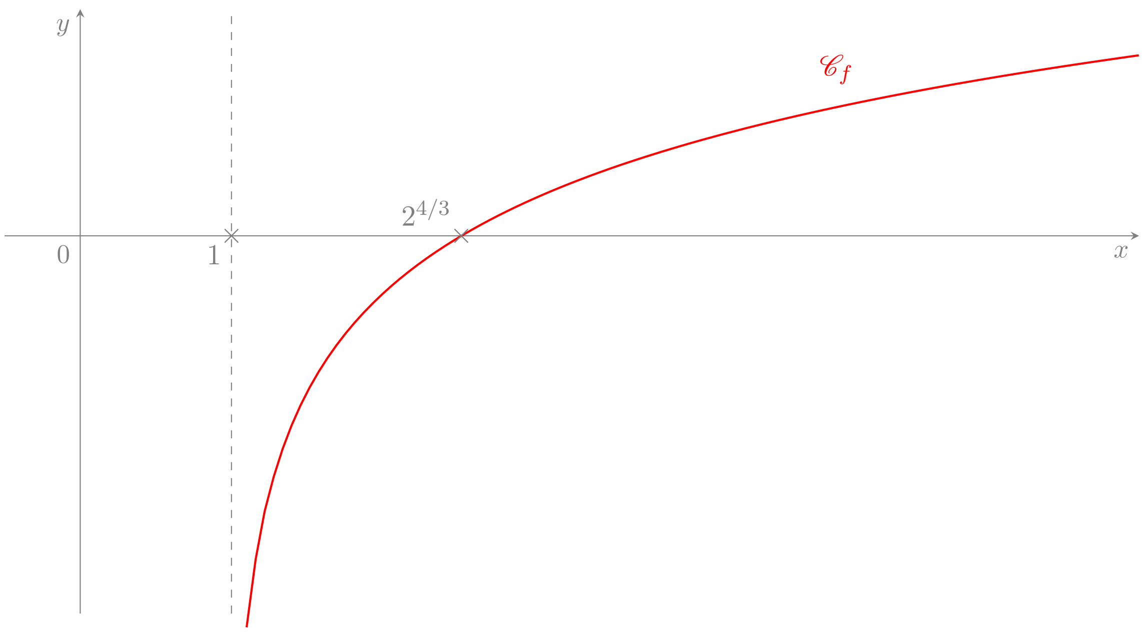
$$\forall x \in D_f, \qquad f'(x) = \frac{\frac{3}{4}x^{-1+3/4}}{x^{3/4} - 1} = \frac{3}{4x^{1/4}(x^{3/4} - 1)} > 0.$$

Nous en déduisons que f est strictement croissante sur $D_f =]1, +\infty[$. Déterminons les limites de f en 1 et en $+\infty$. Nous avons

- $\lim\limits_{x \to 1} (x^{3/4} - 1) = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0^+} \ln(y) = -\infty$ si bien que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^{3/4} - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} \ln(y) = +\infty$ si bien que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Soit $x \in D_f$. Nous avons $f(x) = 0$ si et seulement si $x^{3/4} - 1 = 1$, c'est-à-dire $x = 2^{4/3}$.

On construit ensuite le tableau de variation (je vous laisse le faire) puis on trace la courbe représentative de f :



Nous déduisons de la lecture du tableau de variations que tout réel admet un unique antécédent par f. Cela signifie que f est une bijection de D_f dans $\mathbb{R}$ (plus rigoureusement il s'agit d'un corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, version faible du théorème de la bijection, puisque f est continue et strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et $f(D_f) = \mathbb{R}$).

Déterminons la réciproque de f. Donnons-nous $x \in D_f$ et $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
y = f(x) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad y = \ln(x^{3/4} - 1) \\
&\Longleftrightarrow \qquad e^y = x^{3/4} - 1 \\
&\Longleftrightarrow \qquad e^y + 1 = x^{3/4} \\
&\Longleftrightarrow \qquad x = (e^y + 1)^{4/3}
\end{aligned}$$

La première équivalence découle du fait que $\exp$ est une bijection sur $\mathbb{R}$. La dernière découle du fait que $1+e^y>0$ et $x \longmapsto x^{3/4}$ est une bijection sur $\mathbb{R}_+$.

Nous avons donc montré que la bijection réciproque de f est $f^{-1}: x \in \mathbb{R} \longmapsto (e^x+1)^{4/3}$.

Exercice 11. Étudier (domaine de définition, variation, limites, courbes) les fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \ln(x^2+x+2)$,
2) $x \longmapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,
3) $x \longmapsto x^2-8x+15-|4-x|$,
4) $x \longmapsto \sqrt[4]{x^2-2x-3}$.
5) $x \longmapsto -\ln(|x^2-3x+2|)$,
6) $x \longmapsto x^{x^3}$,
7) $x \longmapsto \dfrac{x^3+x^2-2x-3}{2x^2-6}$,
8) $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2+x+2}\right)$,
9) $x \longmapsto \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}\sqrt{|x^2-16|}$,
10) $x \longmapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

Pour les questions 7) et 9), on déterminera des droites asymptotes en $\pm\infty$.

Correction : Nous en avons traité la plupart en cours.

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$. Puisque la fonction racine quatrième est définie sur $\mathbb{R}_+$, nous obtenons que le domaine de définition de $f: x \longmapsto \sqrt[4]{x^2-2x-3}$ est $D_f =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$.

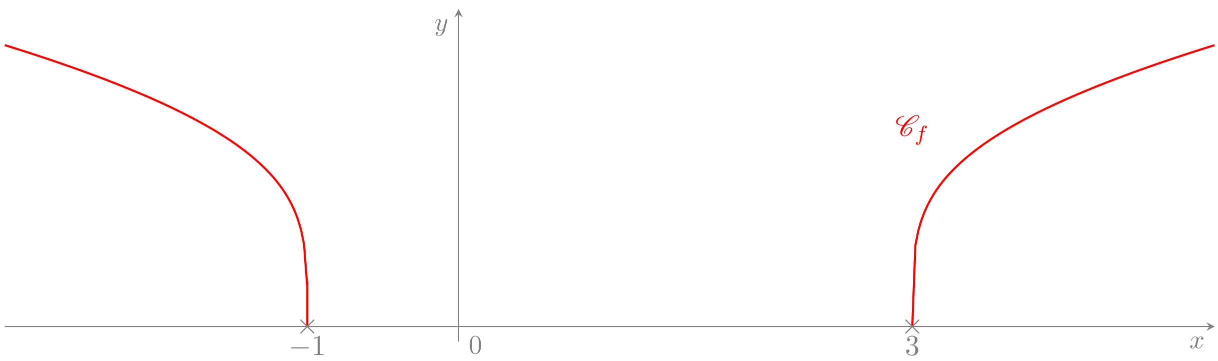
   Puisque la fonction racine quatrième est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nous obtenons que f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$. Soit $x \in]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$. Nous avons

$$f'(x)=\frac{1}{4}(2x-2)\left(x^2-2x-3\right)^{-3/4}=\frac{x-1}{2}\left(x^2-2x-3\right)^{-3/4}.$$

   Ainsi $f'(x)$ est du signe de $x-1$, c'est-à-dire $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 1$. Nous en déduisons que f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ et strictement croissante sur $[3,+\infty[$.

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x-3)=+\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}\sqrt[4]{y}=+\infty$ si bien que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. On a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x-3)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

   On dresse ensuite le tableau de variations de la fonction (je vous laisse le faire) puis on trace sa courbe représentative :



10) Étudions la fonction $f: x \longmapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

   Son domaine de définition est $D_f=\mathbb{R}_*$ (puisque $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ sont définies sur $\mathbb{R}^*$). La partie entière nous pousse à considérer plusieurs cas :

   - Si $x \in]1,+\infty[$, alors $\dfrac{1}{x} \in]0,1[$ si bien que $\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor = 0$ et donc $f(x)=0$.

- Si $x \in]-\infty, -1]$, alors $\frac{1}{x} \in [-1, 0[$ si bien que $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1$ et donc $f(x) = -x$.
- Si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, alors $\frac{1}{x} \in [k, k+1[$ si bien que $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = k$ et donc $f(x) = kx$.
- Si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \left]-\frac{1}{k}, -\frac{1}{k+1}\right]$, alors $\frac{1}{x} \in [-(k+1), -k[$ si bien que $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -(k+1)$ et donc $f(x) = -(k+1)x$.

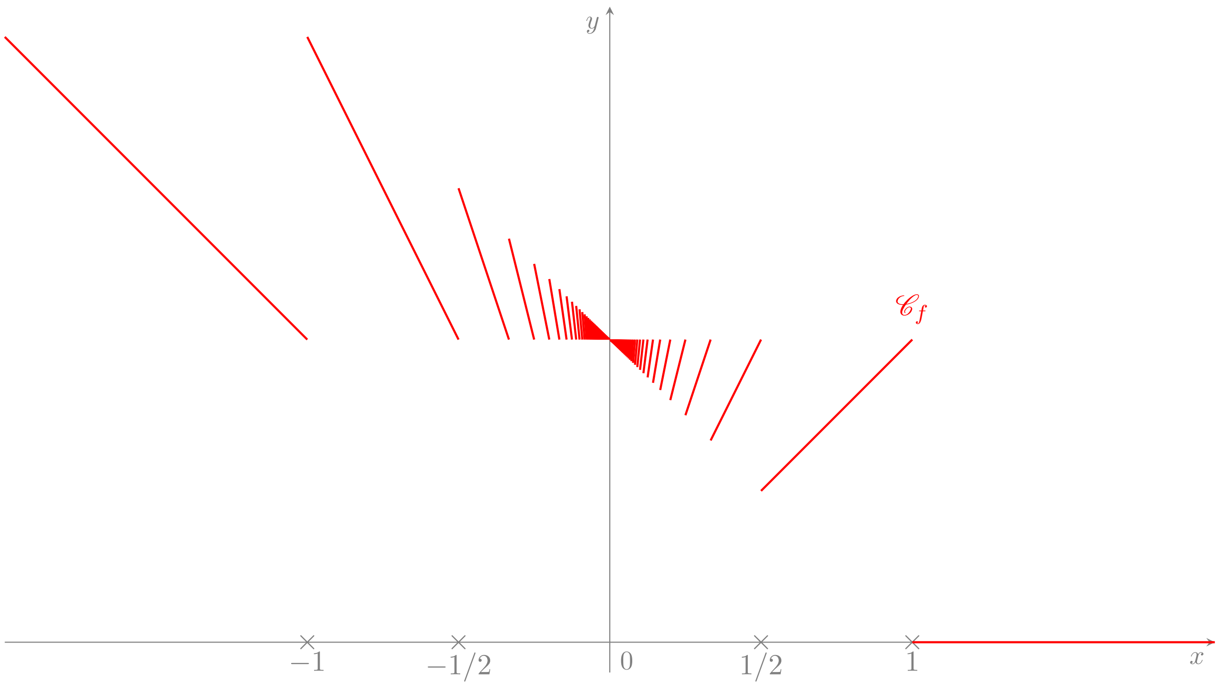
La fonction possède donc un point de discontinuité en tous les réels $\frac{1}{k}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$. Elle est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $\left]-\frac{1}{k}, -\frac{1}{k+1}\right]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Elle est croissante sur $\left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Elle est nulle sur $]1, +\infty[$.

Les limites en $\pm\infty$ n'ont pas grand intérêt (f est une fonctions très simple sur $]1, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1]$). Étudions les limites en 0. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$ par définition de la partie entière de $\frac{1}{x}$. Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 1 - x < f(x) \leqslant 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad 1 < f(x) \leqslant 1 - x.$$

Par encadrement (nous reverrons cela plus rigoureusement dans le chapitre 12), nous obtenons que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. On pourra donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Traçons la courbe de f :



Exercice 14. Résoudre les équations

1) $|4 - x| - |x + 2| + |3x + 5| = 9$,
2) $2e^x - 35e^{-x} = 9$,
3) $2(\ln(x))^2 = 12 + 5\ln(x)$,
4) $x^x = \frac{3}{4}\sqrt{6}$,

Correction :

4) Commençons par rappeler que le terme x^x est bien défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+$. Par ailleurs $0^0 = 1 \neq \frac{3}{4}\sqrt{6}$ donc 0 n'est pas solution de l'équation. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
x^x = \frac{3}{4}\sqrt{6} \qquad &\Longleftrightarrow \qquad x\ln(x) = \ln\left(\frac{3}{4}\sqrt{6}\right) \\
&\Longleftrightarrow \qquad x\ln(x) = \ln(3) - \ln(4) + \ln(\sqrt{6}) \\
&\Longleftrightarrow \qquad x\ln(x) = \ln(3) - 2\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(2) \\
&\Longleftrightarrow \qquad x\ln(x) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

A la deuxième équivalence, on a utilisé le fait que $\exp$ est une bijection sur $\mathbb{R}$.

On remarque tout de suite que $x = \frac{3}{2}$ est solution de l'équation. Pour savoir si c'est la seule, étudions la fonction $f : x \longmapsto x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 + \ln(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 1/e$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[1/e, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0, 1/e]$. Par ailleurs $f(1/e) = -1/e$, $f(1) = 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty.$$

On construit alors le tableau de signe de f. Ce dernier nous permet de conclure que tout réel positif admet un unique antécédent qui appartient à $[1, +\infty[$. Ainsi $3/2$ est l'unique solution de l'équation.

Exercice 15. Résoudre les inéquations :

1) $|x+3| + |1-3x| > -2$
2) $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$,
3) $\ln(-x-3) - \ln(x-5) + \ln(x+4) \geqslant 0$,
4) $\ln(-x-3) \geqslant \ln\left(\frac{x-5}{x+4}\right)$.

Correction :

3) Pour qu'un réel x soit solution de l'inéquation, il faut déjà que $-x-3 > 0$, $x-5 > 0$ et $x+4 > 0$ afin que les trois logarithmes soient bien définis. Il faut donc que $x < -3$, $x > 5$ et $x > -4$. Cette condition n'est vérifiée par aucun réel x. Par conséquent l'inéquation n'admet aucune solution.

4) Pour qu'un réel x soit solution de l'inéquation, il faut déjà que $-x-3 > 0$, $x+4 \neq 0$ et $\frac{x-5}{x+4} > 0$ afin que les deux logarithmes soient bien définis. Il faut donc que $x < -3$ et $x \in]-\infty, -4[\cup]5, +\infty[$ et donc que $x \in]-\infty, -4[$.

Donnons-nous $x \in]-\infty, -4[$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\ln(-x-3) \geqslant \ln\left(\frac{x-5}{x+4}\right) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad -x-3 \geqslant \frac{x-5}{x+4} \\
&\Longleftrightarrow \qquad (-x-3)(x+4) \leqslant x-5 \\
&\Longleftrightarrow \qquad -x^2 - 7x - 12 \leqslant x - 5 \\
&\Longleftrightarrow \qquad x^2 + 8x + 7 \geqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \qquad (x-7)(x-1) \geqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \qquad x \in]-\infty, -7[\cup]-1, +\infty[.
\end{aligned}$$

A la première équivalence, on a utilisé le fait que $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. A la deuxième, on a utilisé le fait que $x + 4 < 0$.

Finalement nous obtenons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty, -7[$.