Feuille d'exercice n^o 3

Etude de fonctions

I Images et antécédents

Exercice 1. 1) Quels sont les antécédents de $-\sqrt{3}$, π, 4 et 144 par $f : x \longmapsto (x-4)^2$

2) Quels sont les antécédents de -32 et 243 par $f : x \longmapsto x^5$

Exercice 2. Déterminer $f(I)$ dans les cas suivants :

1) $f : x \longmapsto x^2$ et $I =]-3, +\infty[$,
2) $f : x \longmapsto 2 - x^3$ et $I =]2, +\infty[$,
3) $f : x \longmapsto 1 - |x+2|$ et $I = [-4, -\frac{1}{2}[$,
4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $I =]-4, 0[\cup]0, 3]$,
5) $f : x \longmapsto \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$ et $I =]-3, 0[\cup]0, 2]$.

On rappelle que, si I est intervalle sur lequel est défini la fonction f, alors $f(I)$ est l'ensemble des images de x par f quand x décrit I, c'est-à-dire $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$.

II Composition de fonctions

Exercice 3. Pour les fonctions f et g définies par les expressions suivantes, donner le domaine de définition et une expression de $f \circ g$ et $g \circ f$. On commencera bien entendu par donner les domaines de définitions de f et g.

1) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = x^2$,
2) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ et $g(x) = x^6$,
3) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$,
4) $f(x) = \tan(x)$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,
5) $f(x) = (\ln(x))^2$ et $g(x) = x^2 - 7x + 10$,
6) $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \ln(x^2-1)$,
7) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \ln(x^2-1)$,
8) $f(x) = e^x$ et $g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}$.

III Propriétés globales des fonctions réelles de la variable réelle

Exercice 4. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications telles que $f(I) \subset J$. Si f et g ont même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante. Si f et g sont de monotonies contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la fonction $f \circ f$ est croissante et la fonction $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 6. Soit I un intervalle symétrique de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire tel que, pour tout $x \in I$, $-x \in I$). Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions paires ou impaires, que dire des fonctions $f+g$ et fg ?

Exercice 7. Que dire d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles qui est à la fois monotone et périodique ?

IV Étude de fonctions

Exercice 8. Considérons les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2+4x-6}{2x-3}$ et $g : x \longmapsto x^2+5x+2$.
Notons $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé.

1) Déterminer les domaines de définition, les variations et les limites des fonctions f et g.
2) Montrer que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(3/2, 5)$ et que $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à la droite $x = -5/2$.
3) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 9. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \ln(x^{3/4}-1)$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Montrer (sans utiliser le théorème de la bijection) que f admet une application réciproque que l'on explicitera.

Exercice 10. Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction $\mathrm{cotan} : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ appelée cotangente.

Exercice 11. Étudier (domaine de définition, variation, limites, courbes) les fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \ln(x^2+x+2)$,
2) $x \longmapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,
3) $x \longmapsto x^2-8x+15-|4-x|$,
4) $x \longmapsto \sqrt[4]{x^2-2x-3}$.
5) $x \longmapsto -\ln(|x^2-3x+2|)$,
6) $x \longmapsto x^{x^3}$,
7) $x \longmapsto \dfrac{x^3+x^2-2x-3}{2x^2-6}$,
8) $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2+x+2}\right)$,
9) $x \longmapsto \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}\sqrt{|x^2-16|}$,
10) $x \longmapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

Pour les questions 7) et 9), on déterminera des droites asymptotes en $\pm\infty$.

V Inégalités, équations, inéquations

Exercice 12. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x-1$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 13. Montrer que :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x \leqslant e^x$.
2) Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $|\tan(x)| \leqslant |x|$.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x-\dfrac{x^3}{3!} \leqslant \sin(x) \leqslant x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$.

Exercice 14. Résoudre les équations

1) $|4-x|-|x+2|+|3x+5| = 9$,
2) $2e^x-35e^{-x} = 9$,
3) $2(\ln(x))^2 = 12+5\ln(x)$,
4) $x^x = \dfrac{3}{4}\sqrt{6}$,

Exercice 15. Résoudre les inéquations :

1) $|x+3|+|1-3x| > -2$
2) $x-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$,
3) $\ln(-x-3)-\ln(x-5)+\ln(x+4) \geqslant 0$,
4) $\ln(-x-3) \geqslant \ln\left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)$.