Correction de quelques exercices de la feuille de TD 2

I Nombres réels, équations, inéquations

Exercice 1. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Correction : Raisonnons par l'absurde : supposons que $\sqrt{2}$ est un rationnel et montrons que cela aboutit à une contradiction. Il existe deux entiers p et q, avec $q \neq 0$ tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. On choisit p et q de telle sorte qu'ils soient premiers entre eux (c'est-à-dire ils n'aient pas de diviseur commun autre que 1 et -1). En élevant en carré, on obtient que $2q^2 = p^2$ si bien que p^2 est pair. Or nous avons vu en cours qu'un entier admet un carré pair si et seulement si il est lui même pair. Ainsi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$ et donc $2q^2 = 4k^2$. Nous en déduisons que $q^2 = 2k^2$ et donc que que q^2 est pair. Cela entraîne que q est pair et donc que p et q admettent tous les deux l'entier 2 pour diviseur commun : c'est absurde. Cela montre que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 2. Soient x, y et z des nombres réels.

1) Étudier le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité triangulaire renversée.
2) Montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$ avec égalité si et seulement si $x = y$.
3) Montrer que $(x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$ avec égalité si et seulement si $x = y$.
4) Montrer que $|x| + |y| \leqslant |x+y| + |x-y|$ avec égalité si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$.
5) Montrer que $xy + yz + xz \leqslant x^2 + y^2 + z^2$ avec égalité si et seulement si $x = y = z$.

Correction : Soient x, y et z des nombres réels.

1) Si $|x+y| = |x| + |y|$, alors $(x+y)^2 = (|x|+|y|)^2$ et donc
$$x^2 + y^2 + 2xy = |x|^2 + |y|^2 + 2|x|\,|y| = x^2 + x^2 + 2|xy|.$$
Nous en déduisons que $xy = |xy|$ et donc que $xy \in \mathbb{R}_+$. Cela signifie que x et y sont de même signe. Réciproquement, si x et y sont de même signe, alors il est immédiat que l'égalité $|x+y| = |x| + |y|$ ait lieu.
Si $|x-y| = ||x| - |y||$, alors $(x-y)^2 = (|x|-|y|)^2$ et donc
$$x^2 + y^2 - 2xy = |x|^2 + |y|^2 - 2|x|\,|y| = x^2 + x^2 - 2|xy|.$$
Nous en déduisons que $xy = |xy|$ et donc que x et y sont de même signe. Réciproquement, si x et y sont de même signe, alors il est immédiat que l'égalité $|x-y| = ||x| - |y||$ ait lieu.
2) On a $\dfrac{x^2+x^2}{2} - xy = \dfrac{x^2+y^2-2xy}{2} = \dfrac{(x-y)^2}{2} \geqslant 0$, d'où l'inégalité voulue. De plus $\dfrac{x^2+x^2}{2} = xy$ si et seulement si $\dfrac{(x-y)^2}{2} = 0$. Ce qui a lieu si et seulement si $x = y$.
3) On a $2(x^2+x^2) - (x+y)^2 = 2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2 - 2xy = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geqslant 0$, d'où l'inégalité voulue. De plus $2(x^2+x^2) = (x+y)^2$ si et seulement si $(x-y)^2 = 0$. Ce qui a lieu si et seulement si $x = y$.

4) L'inégalité est une conséquence directe de l'inégalité triangulaire. Si $|x|+|y|=|x+y|+|x-y|$ alors, en passant au carré, on a $|x|^2+|y|^2+2|x|\,|y|=|x+y|^2+|x-y|^2+2|x+y|\,|x-y|$. Par conséquent

$$x^2+y^2+2|xy|=x^2+y^2+2|xy|+x^2+y^2-2|xy|+2|(x+y)(x-y)|.$$

En simplifiant, on obtient $2|xy|=x^2+y^2+2|x^2-y^2|$ et donc $0=(|x|-|y|)^2+2|x^2-y^2|$. Nous en déduisons que $|x|=|y|$ et $x^2=y^2$. Finalement $x=y$ ou $x=-y$. Réciproquement, on vérifie aisément que, si $x=y$ ou $x=-y$, alors $|x|+|y|=|x+y|+|x-y|$.

5) D'après la question 2, on a $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$, $xz \leqslant \dfrac{x^2+z^2}{2}$ et $zy \leqslant \dfrac{z^2+y^2}{2}$. En sommant ces trois inégalités, on obtient

$$xy+xz+yz \leqslant \frac{x^2+y^2+x^2+z^2+y^2+z^2}{2}=x^2+y^2+z^2.$$

Il y a égalité si et seulement si $2(xy+xz+yz)=x^2+y^2+x^2+z^2+y^2+z^2$. Ce qui a lieu si et seulement si $(x-y)^2+(y-z)^2+(x-y)^2=0$. Nous déduisons qu'il y a égalité si et seulement si $x=y=z$ (en effet, si la somme de termes positifs est nulle, alors tous les termes de la somme sont nuls).

Exercice 3.

1) Calculer $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor$ pour tout réel x.
2) Montrer que, pour tous réels x et y, $\lfloor x+y\rfloor-\lfloor x\rfloor-\lfloor y\rfloor \in \{0,1\}$.
3) Montrer que, pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$, $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$.

Correction :

1) Si $x\in\mathbb{Z}$, alors $\lfloor x\rfloor=x$ et $\lfloor -x\rfloor=-x$ si bien que $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=0$.

   Supposons que $x\notin\mathbb{Z}$. On a $\lfloor x\rfloor<x<\lfloor x\rfloor+1$ et $\lfloor -x\rfloor<-x<\lfloor -x\rfloor+1$. En sommant ces deux termes, on obtient
$$\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor<0<\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor+2$$
   c'est-à-dire $-2<\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor<0$. Ainsi $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor$ est un entier qui se trouve strictement entre -2 et 0. Nous en déduisons que $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=-1$.

2) Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous avons $\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1$ donc $-x\leqslant-\lfloor x\rfloor<1-x$. Nous avons $\lfloor y\rfloor\leqslant y<\lfloor y\rfloor+1$ donc $-y\leqslant-\lfloor y\rfloor<1-y$. Enfin $\lfloor x+y\rfloor\leqslant x+y<\lfloor x+y\rfloor+1$ donc $x+y-1<\lfloor x+y\rfloor\leqslant x+y$. En sommant ces trois inégalités, on obtient
$$-x-y+x+y-1<\lfloor x+y\rfloor-\lfloor x\rfloor-\lfloor y\rfloor<1-x+1-y+x+y,$$
   c'est-à-dire $-1<\lfloor x+y\rfloor-\lfloor x\rfloor-\lfloor y\rfloor<2$. Ainsi $\lfloor x+y\rfloor-\lfloor x\rfloor-\lfloor y\rfloor$ est un entier qui se trouve strictement entre -1 et 2. Il s'agit donc de 0 ou de 1.

3) Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$. On a $\lfloor x\rfloor<x<\lfloor x\rfloor+1$ donc $\lfloor x\rfloor+n<x+n<(\lfloor x\rfloor+n)+1$. Puisque $\lfloor x\rfloor+n\in\mathbb{Z}$ nous obtenons, par unicité de la partie entière du réel $x+n$, que $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$.

Exercice 7. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$|2x-5|<|x+3|,\qquad 23x-12x^2\geqslant 10,\qquad 2(x-2)(1-2x)+1<x(x+3),$$
$$x^2-4|x|\leqslant 5,\qquad e^x>1+6e^{-x},\qquad \frac{1}{3x^2+2x+4}\geqslant\frac{2}{5x^2+6x+1}.$$

Correction : Nous avons résolu la plupart en cours. Occupons-nous de la dernière.

Soit x un réel vérifiant $\dfrac{1}{3x^2+2x+4}\geqslant\dfrac{2}{5x^2+6x+1}$. Il faut déjà que les quotients des deux dénominateurs soient non nuls.

- Le trinôme $3X^2+2X+4$ admet pour discriminant $\Delta=-44<0$ donc il est strictement positif. En particulier il ne s'annule jamais.
- Le trinôme $5X^2+6X+1$ admet pour discriminant $\Delta=16>0$. Par conséquent il s'annule en $\dfrac{-6+\sqrt{\Delta}}{2\cdot 5}=-1$ et en $\dfrac{-6-\sqrt{\Delta}}{2\cdot 5}=-\dfrac{1}{5}$. Par ailleurs il est strictement négatif si et seulement si $]-1,-1/5[$.

Soit $x\notin\{-1,-1/5\}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{3x^2+2x+4}\geqslant\frac{2}{5x^2+6x+1} &\iff \frac{1}{3x^2+2x+4}-\frac{2}{5x^2+6x+1}\geqslant 0\\ &\iff \frac{5x^2+6x+1-2(3x^2+2x+4)}{(3x^2+2x+4)(5x^2+6x+1)}\geqslant 0\\ &\iff \frac{x^2-2x+7}{(3x^2+2x+4)(5x^2+6x+1)}\leqslant 0.\end{aligned}$$

Or le trinôme X^2-2X+7 admet pour discriminant $-24<0$ donc il est toujours strictement positif. Par conséquent $\dfrac{x^2-2x+7}{(3x^2+2x+4)(5x^2+6x+1)}$ est du signe de $5x^2+6x+1$. Nous en déduisons que l'ensemble des solutions est $]-1,-1/5[$.

Exercice 8. Simplifier $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

Correction : Posons $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=(5\sqrt{2}+7)^{1/3}-(5\sqrt{2}-7)^{1/3}$. On a

$$\begin{aligned}x^3&=\left[(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]^3-3\left[(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]^2\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}\right]\\ &\qquad+3\left[(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}\right]^2-\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}\right]^3\\ &=5\sqrt{2}+7-3\left[(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]^2\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}\right]+3\left[(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}\right]^2-5\sqrt{2}+7\\ &=14+3\left[(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}\right]\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}-(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]\\ &=14+3\left[(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)\right]^{1/3}(-x)\\ &=14-3x\left[50-49\right]^{1/3}=14-3x.\end{aligned}$$

Ainsi $0=x^3+3x-14=(x-2)(x^2+2x+7)$. Or le discriminant du trinôme X^2+2X+7 est strictement négatif donc $x^2+2x+7\neq 0$. Nous en déduisons que $x=2$.

Exercice 9. Déterminer $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right[$ et $\beta\in\left]-\dfrac{\pi}{5},0\right]$ tels que $\dfrac{19\pi}{12}\equiv\alpha\left[\dfrac{\pi}{3}\right]$ et $\dfrac{19\pi}{12}\equiv\beta\left[\dfrac{\pi}{5}\right]$.

Correction : On cherche $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right[$ et un entier k tels que $\alpha=\dfrac{19\pi}{12}-k\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{(19-4k)\pi}{12}$. Prenons $k=4$. Dans ce cas, $\alpha=\dfrac{3\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right[$.

On cherche $\beta\in\left]-\dfrac{\pi}{5},0\right]$ et un entier ℓ tels que $\beta=\dfrac{19\pi}{12}-\ell\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{(95-12\ell)\pi}{60}$. Prenons $\ell=8$. Dans ce cas, $\beta=-\dfrac{\pi}{60}\in\left]-\dfrac{\pi}{5},0\right]$

II Manipulation de sommes et de produits

Exercice 14.

1) Déterminer deux réels α et β tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{\alpha}{k+1} + \dfrac{\beta}{k+3}$.

   En déduire une expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$, où $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Correction :

1) Soient α et β des réels et $k \in \mathbb{N}^*$. Nous avons

$$\frac{\alpha}{k+1} + \frac{\beta}{k+3} = \frac{\alpha(k+3) + \beta(k+1)}{(k+1)(k+3)} = \frac{(\alpha+\beta)k + (3\alpha+\beta)}{(k+1)(k+3)}.$$

   Par conséquent $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{\alpha}{k+1} + \dfrac{\beta}{k+3}$ si et seulement si $(\alpha+\beta)k + (3\alpha+\beta) = 1$. Cela est valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $\alpha + \beta = 0$ et $3\alpha + \beta = 1$. On trouve $\alpha = -\beta = \dfrac{1}{2}$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3}.$$

   Faisons les changements d'indice $j = k+1$ dans la première somme et $j = k+3$ dans la deuxième. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j} - \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+3} \frac{1}{j} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j} - \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right).
\end{aligned}$$

2) Analogue à la première question. On trouve : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$.

Exercice 15. Soient n un entier naturel non nul. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $S_p(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$.

1) Donner une expression de $S_0(n)$ et $S_1(n)$.
2) a) Pour tous entiers naturels k et p, développer $(k+1)^p - k^p$.
   b) En déduire une relation de récurrence vérifiée par la suite $\big(S_p(n)\big)_{p\in\mathbb{N}}$.
   c) Retrouver les expressions (vues en cours) de $S_1(n)$, $S_2(n)$ puis $S_3(n)$.

Correction :

1) On a $S_0(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et, d'après le cours, $S_1(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) a) Pour tous entiers naturels non nuls k et p, la formule du binôme de Newton entraîne que

$$(k+1)^p - k^p = -k^p + \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} k^j = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} k^j.$$

b) Sommons les égalité ci-dessus pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^p - k^p\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} k^j.$$

A gauche on a une somme télescopique, qui est égale à $(n+1)^p - 1$. A droite, on a une somme double sur un domaine rectangulaire. Par conséquent

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} k^j = \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=1}^{n} \binom{p}{j} k^j = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} S_j(n).$$

Nous en déduisons la formule de récurrence :

$$(n+1)^p - 1 = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} S_j(n).$$

c) Appliquons cette formule à $p = 2$:

$$(n+1)^2 - 1 = \binom{2}{0} S_0(n) + \binom{2}{1} S_1(n) = n + 2S_1(n).$$

Ainsi $2S_1(n) = (n+1)^2 - 1 - n = (n+1)(n+1-1) = n(n+1)$.

Appliquons cette formule à $p = 3$:

$$(n+1)^3 - 1 = \binom{3}{0} S_0(n) + \binom{3}{1} S_1(n) + \binom{3}{2} S_2(n) = n + 3S_1(n) + 3S_2(n).$$

Ainsi $3S_2(n) = (n+1)^3 - 1 - n - 3S_1(n) = n^3 + 3n + 3n^2 - n - \dfrac{3n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

Appliquons cette formule à $p = 4$:

$$(n+1)^4 - 1 = \binom{4}{0} S_0(n) + \binom{4}{1} S_1(n) + \binom{4}{2} S_2(n) + \binom{4}{3} S_2(n) = n + 4S_1(n) + 6S_2(n) + 4S_3(n).$$

On trouve $4S_3(n) = n^2(n+1)^2$.

Exercice 21. Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Montrer que

$$\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Correction : Fixons $p \in \mathbb{N}$. Montrons la formule par récurrence sur $n \geqslant p$ (à p fixé donc).

- *Initialisation :* On a $\displaystyle\sum_{i=p}^{p} \binom{i}{p} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$ donc la formule est vraie au rang p.

- *Hérédité :* Supposons que la formule soit vraie au rang n pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à p. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a
$$\sum_{i=p}^{n+1}\binom{i}{p}=\sum_{i=p}^{n}\binom{i}{p}+\binom{n+1}{p}=\binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p},$$
d'après l'hypothèse de récurrence. Or la formule du triangle de Pascal entraîne que
$$\binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p}=\binom{n+2}{p+1}.$$
Ainsi la formule est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \geqslant p$.

Exercice 23. Montrer de deux manières différentes que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On peut bien sûr montrer l'inégalité par récurrence sur $n \in \mathbb{R}^*$ (elle est immédiate pour $n=1$ et je vous laisse en exercice la suite de la rédaction). On peut aussi utiliser la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$,
$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^n=1+\binom{n}{1}x^1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^n=1+nx+\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^n}_{\geqslant 0}.$$
Ainsi $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j), \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j), \qquad \sum_{(i,j)\in A_n}(i+j), \qquad \sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}\frac{k}{1+\ell},$$
$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j), \qquad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}2^{\min(i,j)}, \qquad \sum_{1\leqslant p,q\leqslant n}n^{p+q},$$
où $A_n=\{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2 : k+\ell=n\}$.

Correction : Traitons les deux dernières.

- On commence par décomposer selon que $i<j$, $j<i$ ou $i=j$:
$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}2^{\min(i,j)}&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2^{\min(i,j)}+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}2^{\min(i,j)}+\sum_{i=1}^{n}2^{\min(i,j)}\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2^i+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}2^j+\sum_{i=1}^{n}2^i=2\times\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2^i+\sum_{i=1}^{n}2^i,\end{aligned}$$
car les indices i et j des deux premières sommes sont interchangeables.

  Si $n=1$, alors $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2^i=0$ donc $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}2^{\min(i,j)}=\sum_{i=1}^{1}2^i=2$. Supposons que $n\geqslant 2$. On a
$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}2^{\min(i,j)}=2\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}2^i\right)+2\frac{1-2^n}{1-2}&=2\sum_{j=2}^{n}\left(2\frac{1-2^{j-1}}{1-2}\right)+2(2^n-1)\\&=2\sum_{j=2}^{n}\left(2^j-2\right)+2^{n+1}-2\\&=2\sum_{j=2}^{n}2^j-4(n-1)+2^{n+1}-2.\end{aligned}$$

On a $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} 2^j = \sum_{j=0}^{n} 2^j - 2^0 - 2^1 = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 3 = 2^{n+1} - 4$ si bien que

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2^{\min(i,j)} = 2^{n+2} - 8 - 4n + 4 + 2^{n+1} - 2 = (2+1)2^{n+1} - 4n - 5 = 3\cdot 2^{n+1} - 4n - 6.$$

- On reconnaît la formule de développement/factorisation :

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} n^{p+q} = \left(\sum_{p=1}^{n} n^p\right)\left(\sum_{q=1}^{n} n^q\right) = \left(\sum_{p=1}^{n} n^p\right)^2 = \left(n\,\frac{1-n^n}{1-n}\right)^2$$