Feuille d'exercice n° 28

Variables aléatoires à densité

Exercice 1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,2])$. Posons $Y = X^2$.

1) Déterminer la fonction de répartition de Y.
2) En déduire que Y est une variable à densité. On déterminera une densité de Y.
3) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ de deux façons.

Exercice 2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$.

Exercice 3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-a,a])$ avec $a > 0$. Montrer que $Y = e^X$ est une variable aléatoire à densité dont un précisera une densité.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et admettant une densité f qui est une fonction paire sur $\mathbb{R}$. On définit la variable aléatoire Y par

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X(\omega) \leqslant 0 \\ X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) > 0. \end{cases}$$

Montrer que Y n'est ni une variable aléatoire discrète, ni une variable aléatoire à densité.

Exercice 5 (Loi Gamma). On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi Gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$, notée $\gamma(a, \lambda)$, si elle admet pour densité la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler (cf. feuille d'exercice n° 27) définie par

$$\forall y \in]0,+\infty[, \qquad \Gamma(y) = \int_0^{\infty} t^{y-1} e^{-t}\, dt.$$

1) Justifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité.
2) Qu'est ce que la loi $\gamma(1, \lambda)$?
3) Montrer que X admet une espérance et une variance. Calculer-les.
4) Montrer que $\lambda X \hookrightarrow \gamma(a, 1)$.
5) Expliciter une densité de la loi $Y = \dfrac{1}{X}$ et de la loi $\sqrt{X}$.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire dont une densité est $f : x \longmapsto \left(\dfrac{4}{3}\right)^{1/4} \Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\dfrac{x^4}{12}\right)$. Donner la loi de $Y = X^4$.

On remarquera d'abord que f est paire puis on effectuera le changement de variable donné par la fonction $\varphi : x \longmapsto x^4$ qui est de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$ pour tout $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon < A$.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{]0,1[}(x) + \frac{3}{8} \mathbb{1}_{]3,5[}(x).$$

1) Déterminer la fonction de répartition de X.
2) Calculer l'espérance de X.
3) Déterminer une densité de $Y = 1/X$.

Exercice 8 (Loi de Pareto). Soient $\alpha > 0$ et $c > 0$.

1) Déterminer $K > 0$ afin que $f : x \longmapsto \dfrac{K}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{[c,+\infty[}(x)$ soit une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire dont f est une densité. On dit alors que X suit la loi de Pareto de paramètres α et c.

2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3) Pour quelles valeurs de α, X admet-elle une espérance ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ dans ce cas.
4) Pour quelles valeurs de α, X admet-elle un moment d'ordre 2 ? Calculer $\mathbb{V}(X)$ dans ce cas.
5) Soit $\beta > 0$. Déterminer la loi de X^β.
6) a) Déterminer la loi de $Y = \dfrac{1}{X}$.
   b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ de deux façons différentes.

Exercice 9 (Loi du χ^2 à un degré de liberté). Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On dit que $Y = X^2$ suit la loi du χ^2 à un degré de liberté.

1) Déterminer une densité de Y.
   On pourra effectuer le changement de variable $x = \sqrt{y}$ qui est de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$ pour tout $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon < A$.
2) Donner, sans calcul, l'espérance de Y.

Exercice 10. On dispose d'un bâton d'un mètre. On le casse en deux morceaux en choisissant le point de cassure au hasard.

1) Déterminer la loi de la longueur du petit morceau.
2) Déterminer la loi de la longueur du grand morceau.
3) Déterminer la loi du rapport de la longueur du petit morceau et de celle du grand morceau.

Exercice 11 (Loi de Laplace). Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

1) Déterminer $K > 0$ afin que $f : x \longmapsto K \exp\left(-\dfrac{|x-\mu|}{b}\right)$ soit une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire dont f est une densité. On dit alors que X suit la loi de Laplace de paramètres μ et b.

2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3) Calculer l'espérance et la variance de X, si elles existent.
4) Déterminer la loi de $Y = \dfrac{X-\mu}{b}$ et de $Z = |Y|$.

Exercice 12 (absence de mémoire). Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, et qui n'est pas presque sûrement nulle et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire, i.e.,

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \qquad \mathbb{P}(X > x+y) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(X > y).$$

Montrer que X suit une loi exponentielle.

Exercice 13 (Simulation de loi par inversion de la fonction de répartition). Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité. On suppose que sa fonction de répartition F est strictement croissante sur un intervalle ouvert I vérifiant $\mathbb{P}(X \in I) = 1$.

1) Justifier que F_X est une bijection de I sur $]0,1[$.
2) Soit U une v.a. de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Montrer que la variable aléatoire $F_X^{-1}(U)$ est à densité et déterminer sa fonction de répartition.
3) En déduire une méthode pour simuler
   a) une v.a. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
   b) une v.a. de loi de Cauchy.

Exercice 14 (Propriétés de la fonction Φ). Notons Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Montrer que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) Exprimer $\mathbb{P}(|X| > x)$ en fonction de $\Phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Exprimer $F_Y(x)$ en fonction de $\Phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 (Moments d'une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$). Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Montrer que X admet des moments[1] de tout ordre. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note μ_r le moment d'ordre r de X.
2) Montrer que $\mu_{2r+1} = 0$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.
3) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\mu_{r+2} = (r+1)\mu_r$.
4) En déduire que une expression de μ_r pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 (Transformée de Laplace d'une v.a. de loi normale). Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Notons $\varphi_{m,\sigma}$ une densité de X.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\Lambda_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\varphi_{m,\sigma}(x)\,dx$.

On dit que Λ est la transformée de Laplace de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Exercice 17 (Loi log-normale centrée réduite).

1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $Y = e^X$ admet une densité. En expliciter-une.

On dit alors que Y suit une loi log-normale centrée réduite. On note f une densité de Y. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, notons $f_\alpha : x \longmapsto \big(1 + \alpha \sin(2\pi \ln(x))\big) f(x)$.

2) Montrer que f_α est une densité de probabilité.
3) Soit Y_α une v.a. de densité f_α. Montrer que les moments de Y_α ne dépendent pas de α.

Nous en déduisons que les moments d'une v.a. ne caractérisent pas sa loi.

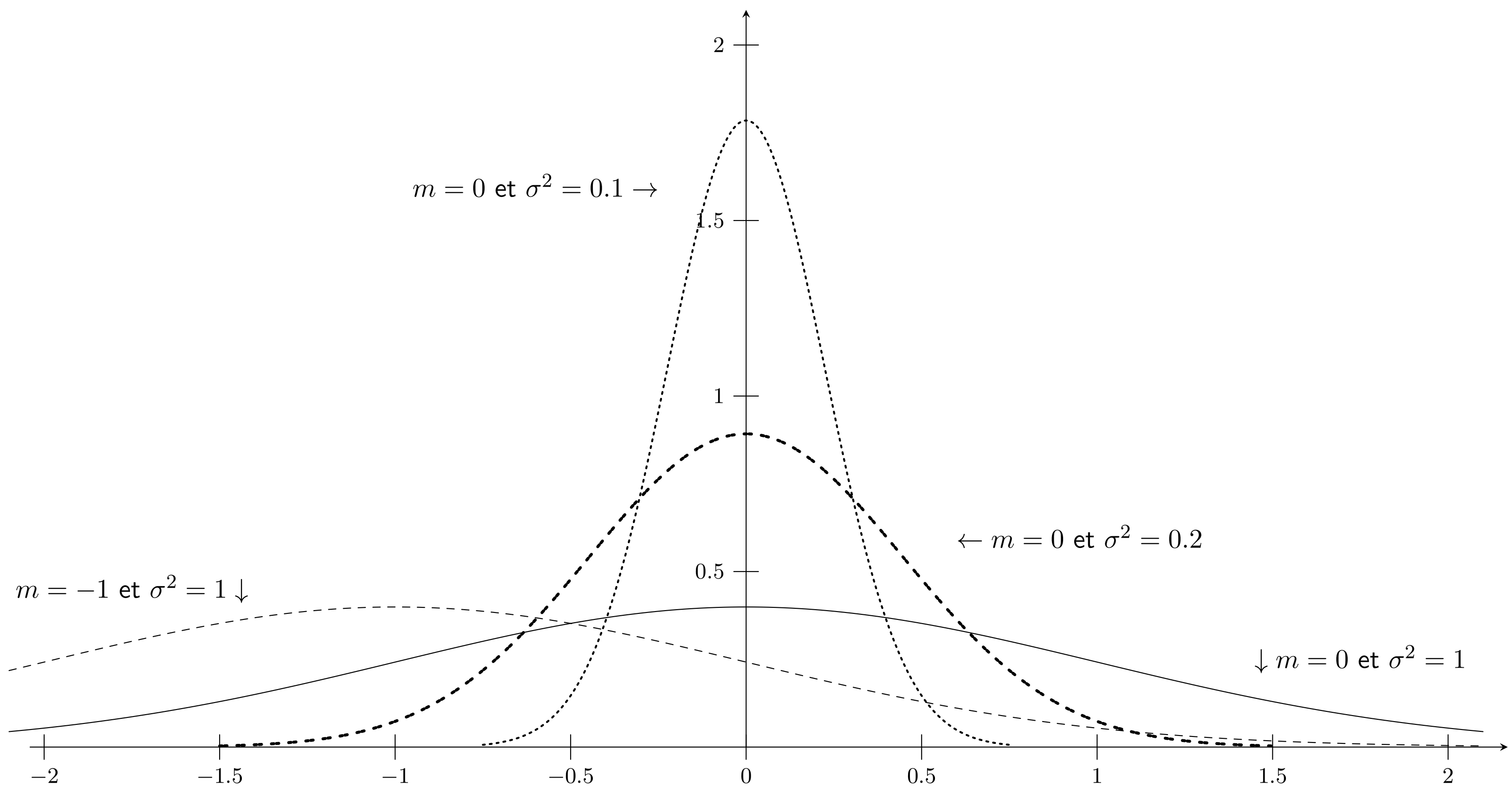
Exercice 18. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$. Le but de cet exercice est de montrer que X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\,dt$ converge et que, dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\,dt$.

On introduit la fonction $\psi : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt$.

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^x \big(1 - F_X(t)\big)\,dt = x\big(1 - F_X(x)\big) + \psi(x)$.
2) Supposons que X admette une espérance.
   a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant x\big(1 - F_X(x)\big) \leqslant \mathbb{E}(X) - \psi(x)$.
   b) En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\big(1 - F_X(x)\big)$.
   c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\,dt$ converge et que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\,dt$.
3) Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\,dt$ converge.
   a) Montrer que ψ admet une limite finie en $+\infty$.
   b) En déduire que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\,dt$.

---

1. On rappelle qu'on dit qu'une variable aléatoire réelle X admettant une densité f admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^r f(t)\,dt$ converge. Dans ce cas on appelle moment d'ordre r l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,dt$.



Quelques courbes de densités de variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0,1)$ pour différentes valeurs de m et σ^2.