Correction de quelques exercices de la feuille de TD 27

I Convergence d'intégrales généralisées

Exercice 1. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x+3}}\,dx$,
2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x-1)^{3/2}}\,dx$,
3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-2)}}$,
4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+5x+2}{7x^5+2x^3+3x+1}\,dx$,
5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$,
6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^{2018}(x)}{x^2}\,dx$,
7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\tan(x)}}$,
8) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}(\ln(x))^2}\,dx$,
9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+xe^x}$,
10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\cos(x)\,dx$,
11) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^{3/2}-\sqrt{x^3+1}\right)dx$,
12) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^5 e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx$,
13) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\,\mathrm{Arctan}(x)}\,dx$,
14) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\tan(\sqrt{x})}{\ln(\cos(\sqrt{x}))}\,dx$,
15) $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dx$.

Pour la question 15, on pourra montrer que, au voisinage de $\frac{2}{\pi}$, $\cos\left(\frac{1}{t}\right) \sim \frac{\pi^2}{4}\left(t-\frac{2}{\pi}\right)$.

Correction : A chaque question, notons f l'intégrande.

1) Traité en cours.
2) Traité en cours.
3) Traité en cours.
4) La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$. De plus $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{7x^5} = \frac{1}{7x^3}$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ converge donc, par comparaisons de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
5) Traité en cours.
6) Traité en cours.
7) Traité en cours.
8) Traité en cours.
9) Traité en cours.
10) La fonction f est continue sur $]-\infty,0]$. De plus $|x^2 f(x)| \leqslant x^2e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Par conséquent $|f(x)| \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}$ converge donc, par comparaisons de fonctions positives, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}|f(x)|\,dx$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}|f(x)|\,dx$ converge et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ converge (car la convergence absolue implique la convergence).
11) La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$. De plus
$$f(x) = x^{3/2}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}\right) \underset{+\infty}{\sim} x^{3/2}\frac{-1}{2x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{x^{3/2}}$$
puisque $\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{-1}{x^{3/2}}\,dx$ converge donc, par comparaisons de fonctions négatives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

12) La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$. De plus $x^2 f(x) = x^7 e^{-x^{1/3}} = (x^{1/3})^{21} e^{-x^{-1/3}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $u^{21}e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge donc, par comparaisons de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ainsi $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

13) La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$x^2 f(x) = \exp\left(-x\operatorname{Arctan}(x) + 2\ln(x)\right) = \exp\left(-x\left(\operatorname{Arctan}(x) - 2\frac{\ln(x)}{x}\right)\right).$$

Or $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Par conséquent $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge donc, par comparaisons de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ainsi $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

14) Traité en cours.

15) La fonction f est continue sur $\left]\frac{2}{\pi},+\infty\right[$. De plus

- $f(x) = \ln\left(1+\cos\left(\frac{1}{t}\right)-1\right) \underset{+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{t}\right)-1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t^2}$ puisque $\frac{1}{t} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^2}\,dx$ converge donc, par comparaisons de fonctions négatives, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
- Soit $h \in]0,\infty[$. On a

$$\cos\left(\frac{1}{2/\pi+h}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2/\pi+h}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+\pi h/2}\right)\right).$$

  Ainsi

$$\cos\left(\frac{1}{2/\pi+h}\right) \underset{h\to0^+}{\sim} \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+\pi h/2}\right) \underset{h\to0^+}{=} \frac{\pi}{2}\left(1-1+\frac{\pi h}{2}+o(h)\right) \underset{h\to0^+}{=} \frac{\pi^2 h}{4}+o(h).$$

  On a donc

$$\sqrt{h}f(2/\pi+h) = \sqrt{h}\ln(h) + \sqrt{h}\ln\left(\frac{\pi^2}{4}+o(1)\right) \underset{h\to0^+}{\longrightarrow} 0.$$

  Ainsi $f(2/\pi+h) \underset{h\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)$ et donc $|f(x)| \underset{x\to2/\pi}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x-2/\pi}}\right)$. Or l'intégrale de Riemann $\int_{2/\pi}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-2/\pi}}$ converge si bien que, par comparaison de fonctions positives, $\int_{2/\pi}^1 |f(x)|\,dx$ converge et donc $\int_{2/\pi}^1 f(x)\,dx$ converge.

Finalement $\int_{2/\pi}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Exercice 2. Étudier la convergence des intégrales suivantes en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$:

1) $\int_{1/2}^2 \big(\ln(x)\big)^\alpha\,dx$,
2) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}\right)^\alpha dx$,
3) $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{\beta x}\,dx$,
4) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^\alpha)}{x^\beta}\,dx$
5) $\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\,dx$,
6) $\int_0^\pi \frac{x^\beta}{(\sin(x))^\alpha}\,dx$.

Correction : Toutes ont été traitées en cours sauf la cinquième. On a $f_{\alpha,\beta} : x \longmapsto x^\alpha(1-x)^\beta$ continue sur $]0,1[$. De plus

- $f_{\alpha,\beta} \underset{0^+}{\sim} x^\alpha = \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{-\alpha}}$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$. Par comparaisons de fonctions positives, nous en déduisons que $\displaystyle\int_0^{1/2} f_{\alpha,\beta}(x)\,dx$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.
- $f_{\alpha,\beta} \underset{1^-}{\sim} (1-x)^\beta = \dfrac{1}{(1-x)^{-\beta}}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{-\beta}}$ converge si et seulement si $-\beta < 1$.

  Par comparaisons de fonctions positives, nous en déduisons que $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f_{\alpha,\beta}(x)\,dx$ converge si et seulement si $\beta > -1$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(x)\,dx$ converge si et seulement si $\beta > -1$ et $\alpha > -1$.

II Calcul d'intégrales généralisées

Exercice 4. Justifier que les intégrales suivantes convergent et calculer-les.
Attention : on ne fait des intégrations par parties et changements de variables seulement avec des intégrales sur des segments !

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.
2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(2+x)}$.
   On remarquera que $1 = (x+2) - (x+1)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
3) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right) dx$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
4) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2}\, dx$.
5) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
   On remarquera que $1 = (1+x^2) - x^2$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *puis exprimer* I_{n+1} *en fonction de* I_n.
6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$. *On posera* $u = e^x$.
7) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx$. *On posera* $u = 1/t$.

Correction :

1) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et $f(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. Par conséquent l'intégrale converge. Donnons-nous $A < 0$ et $B > 0$. On a
$$\int_A^B \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{Arctan}(x)]_A^B = \operatorname{Arctan}(B) - \operatorname{Arctan}(A).$$
En faisant tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$, nous obtenons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

2) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)(2+x)}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ et $f(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$. Par conséquent l'intégrale converge. Donnons-nous $B > 1$. On a
$$\int_1^B \frac{dx}{(1+x)(2+x)} = \int_1^B \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = [\ln(x+1) - \ln(x+2)]_1^B = \ln\left(\frac{B+1}{B+2}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$
En faisant tendre B vers $+\infty$, nous obtenons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(2+x)} = 0 - \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

3) Traité en cours.

4) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ et $f(x) \sim \dfrac{\pi}{2x^2}$ au voisinage de $+\infty$. Par conséquent l'intégrale converge. Donnons-nous $B > 1$ et faisons une IPP avec les fonctions

$u : x \longmapsto \dfrac{-1}{x}$ et $x \longmapsto \text{Arctan}(x)$ de classe C^1 sur $[1, B]$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_1^B \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2}\,dx &= \left[-\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\right]_1^B - \int_1^B -\frac{dx}{x(1+x^2)}\\
&= -\frac{\text{Arctan}(B)}{B} + \text{Arctan}(1) + \int_1^B \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}\,dx\\
&= -\frac{\text{Arctan}(B)}{B} + \frac{\pi}{4} + \int_1^B \frac{dx}{x} - \int_1^B \frac{x}{1+x^2}\,dx\\
&= -\frac{\text{Arctan}(B)}{B} + \frac{\pi}{4} + \ln(B) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^B\\
&= -\frac{\text{Arctan}(B)}{B} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(B^2) - \frac{1}{2}\ln(1+B^2) + \frac{1}{2}\ln(2)\\
&= -\frac{\text{Arctan}(B)}{B} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{B^2}{1+B^2}\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$.

5) Traité en cours

6) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$ et $f(x) \underset{-\infty}{\sim} e^{x}$ donc l'intégrale converge. Donnons-nous $A < 0$ et $B > 0$. Faisons le changement de variable $u = e^x$ (de classe C^1 sur $[A, B]$ avec $x = \ln(u)$ et $dx = \dfrac{du}{u}$) :

$$\int_A^B \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{e^A}^{e^B} \frac{1}{u + 1/u}\,\frac{du}{u} = \int_{e^A}^{e^B} \frac{du}{u^2+1} = [\text{Arctan}(u)]_{e^A}^{e^B} = \text{Arctan}(e^B) - \text{Arctan}(e^B).$$

En faisant tendre A vers $-\infty$ (et donc e^A vers 0) et B vers $+\infty$, on obtient que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$.

7) Traité en cours

III Fonctions et suites définies à partir d'intégrales généralisées

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}}$.

1) Justifier que l'intégrale I_n converge.

2) Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
En déduire une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ sur $\mathbb{R}_+$.
On pourra aussi utiliser le fait que $x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4$.

3) Calculer I_0 et exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \ln(\sqrt[3]{n} I_n)$.
   a) Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (v_{n+1} - v_n)$.
   b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $I_n \sim \dfrac{A}{\sqrt[3]{n}}$.

Correction : *C'est un exercice technique et difficile, qui aurait mérité d'être davantage détaillé. Par contre les techniques sont intéressantes et usuelles donc je vous conseille de l'étudier en détail.*

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^{n+1}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et on a $f_n(x) \sim \dfrac{1}{x^{3(n+1)}}$ au voisinage de $+\infty$. Par comparaison de fonctions positive, nous en déduisons que l'intégrale I_n converge.

2) On trouve (en mettant au même dénominateur par exemple) que $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{-1}{3}$ et $c = \frac{2}{3}$.

Pour trouver une primitive, c'est assez technique... Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{-x+2}{3(x^2-x+1)} = \frac{-2x+4}{6(x^2-x+1)} &= -\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}\\ &= -\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}\\ &= -\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{4(x-1/2)^2/3+1}\\ &= -\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{1+((2x-1)/\sqrt{3})^2}.\end{aligned}$$

Une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^3}$ sur $\mathbb{R}_+$ est donc

$$\begin{aligned}F : x \longmapsto \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\\ = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1+x)^3}{x^2-x+1}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

3) On a donc

$$I_0 = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3} = \lim_{x\to+\infty}F(x) - F(0) = 0 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right).$$

On remarque que $\tan(\pi/6) = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $\operatorname{Arctan}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Ainsi

$$I_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Ensuite, donnons-nous $n \in \mathbb{N}$ et $B > 0$. Faisons une IPP avec $u : x \longmapsto x$ et f_n de classe C^1 sur $[0, B]$:

$$\begin{aligned}\int_0^B \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}} &= \left[\frac{x}{(1+x^3)^{n+1}}\right]_0^B - \int_0^B x\,\frac{-(n+1)3x^2}{(1+x^3)^{n+2}}\,dx\\ &= \frac{B}{(1+B^3)^{n+1}} + 3(n+1)\int_0^B \frac{1+x^3-1}{(1+x^3)^{n+2}}\,dx\\ &= \frac{B}{(1+B^3)^{n+1}} + 3(n+1)\int_0^B\left(\frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} - \frac{1}{(1+x^3)^{n+2}}\right)dx.\end{aligned}$$

Faisons tendre B vers $+\infty$. On obtient $I_n = 3(n+1)(I_n - I_{n+1})$. Ainsi $I_{n+1} = \frac{3n+2}{3n+3}I_n$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \ln(\sqrt[3]{n}I_n)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}\frac{I_{n+1}}{I_n}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{3n+2}{3n+3}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n+3}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}\ln\left(1-\frac{1}{3n+3}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{3n}\frac{1}{1+1/n}\right) &\underset{+\infty}{=} \ln\left(1-\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{+\infty}{=} -\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\underset{+\infty}{=} -\frac{1}{3n}+\frac{5}{18n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi
$$v_{n+1}-v_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{3n}-\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{3n}+\frac{5}{18n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{9n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{9n^2}$ converge, le critère de comparaison des séries à termes positifs entraîne que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |v_{n+1}-v_n|$ converge. Ainsi $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (v_{n+1}-v_n)$ converge.

b) Il s'agit d'une série télescopique si bien que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certains réel $\lambda \in \mathbb{R}$. En posant $A=e^\lambda$, nous obtenons que $I_n \sim \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$.

Exercice 10.

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x^n\ln(x)}{x^n-1}\,dx$ converge.
2) A l'aide du changement de variable $y = x^n$ dans l'expression de I_n, montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ converge.

Correction :

1) La fonction $f_n : x \longmapsto \frac{x^n\ln(x)}{x^n-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$. De plus
   - $\sqrt{x}f_n(x) \underset{0^+}{\sim} -x^{n+1/2}\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $f_n(x) \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et donc $\int_0^{1/2} f_n(x)\,dx$ converge par comparaison de fonctions positives.
   - On a $f_n(1-h) = \frac{(1-h)^n\ln(1-h)}{(1-h)^n-1} \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{-h}{-nh} = \frac{1}{n} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{n}$. Par conséquent $f_n(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{n}$. L'intégrale de f_n est donc faussement impropre en 1.

   Finalement I_n converge.
2) Soit ε et A des réels tels que $0<\varepsilon<A<1$. Faisons le changement de variables $y=x^n$ (de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$, avec $x=y^{1/n}$ et $dx = \frac{1}{n}y^{1/n-1}\,dy$) :
$$\int_\varepsilon^A \frac{x^n\ln(x)}{x^n-1}\,dx = \int_{\varepsilon^n}^{A^n} \frac{y\ln(y^{1/n})}{y-1}\frac{1}{n}y^{1/n-1}\,dy = \frac{1}{n^2}\int_{\varepsilon^n}^{A^n}\frac{\ln(y)}{y-1}\,y^{1/n}\,dy \leqslant \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{\ln(y)}{y-1}\,dy.$$
   Cette dernière intégrale converge (la preuve est analogue à celle de la convergence de I_1). En faisant tendre ε vers 0 et A vers 1, nous obtenons que $I_n \leqslant \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{\ln(y)}{y-1}\,dy$. Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge, le critère de comparaison des séries à termes positifs entraîne que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ converge.

IV Exercices plus théoriques

Exercice 11. Soit f une fonction positive et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ce résultat reste-t-il vrai si on ne suppose pas que f est positive (on analysera les deux sens de l'équivalence).

Correction : **A VENIR**

Exercice 12. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs positives qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$.

1) Supposons que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = 0$.

2) Le résultat persiste-t-il si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge ?

Correction :

1) Puisque $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la relation de Chasles entraîne que

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = \int_0^{v(x)} f(t)\,dt - \int_0^{u(x)} f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt - \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0.$$

2) Prenons par exemple $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$, $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto 2x$ qui vérifient les hypothèses de l'énoncé. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge diverge et

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln(2x) - \ln(x) = -\ln(2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2).$$

Ainsi le résultat ne persiste pas.

Exercice 13. Rappelons que, si $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est une série convergente, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'analogue de cette propriété pour les intégrales généralisées : si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge a-t-on $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

1) Supposons que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(t)\big)^2\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f'(t)\big)^2\,dt$ convergent.

   a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)\,dt$ converge.

   b) En déduire que f^2 admet une limite finie en $+\infty$ puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) Supposons que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. En encadrant $f(x)$ par deux intégrales, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 + 2^n(x-n) & \text{si il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x \in [n - 2^{-n}, n], \\ 1 + 2^n(n-x) & \text{si il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x \in [n, n + 2^{-n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

   c) Montrer par l'absurde que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$..

Correction : **A VENIR**