Feuille d'exercice n° 27

Intégrales sur un intervalle quelconque

I Convergence d'intégrales généralisées

Exercice 1. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x+3}}\,dx$,
2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x-1)^{3/2}}\,dx$,
3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-2)}}$,
4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+5x+2}{7x^5+2x^3+3x+1}\,dx$,
5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$,
6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^{2018}(x)}{x^2}\,dx$,
7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\tan(x)}}$,
8) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}(\ln(x))^2}\,dx$,
9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+xe^x}$,
10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\cos(x)\,dx$,
11) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^{3/2}-\sqrt{x^3+1}\right)dx$,
12) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^5 e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx$,
13) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\,\mathrm{Arctan}(x)}\,dx$,
14) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\tan(\sqrt{x})}{\ln(\cos(\sqrt{x}))}\,dx$,
15) $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\,dx$.

Pour la question 15, on pourra montrer que, au voisinage de $\frac{2}{\pi}$, $\cos\left(\frac{1}{t}\right) \sim \frac{\pi^2}{4}\left(t-\frac{2}{\pi}\right)$.

Exercice 2. Étudier la convergence des intégrales suivantes en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$:

1) $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \big(\ln(x)\big)^{\alpha}\,dx$,
2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}\right)^{\alpha}\,dx$,
3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{\beta x}\,dx$,
4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^{\alpha})}{x^{\beta}}\,dx$
5) $\displaystyle\int_0^{1} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx$,
6) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x^{\beta}}{(\sin(x))^{\alpha}}\,dx$.

Exercice 3 (Intégrales de Bertrand). Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}\big(\ln(t)\big)^{\beta}}$ converge si et seulement si ($\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)).
2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{\alpha}\big|\ln(t)\big|^{\beta}}$ converge si et seulement si ($\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)).

II Calcul d'intégrales généralisées

Exercice 4. Justifier que les intégrales suivantes convergent et calculer-les.
Attention : on ne fait des intégrations par parties et changements de variables seulement avec des intégrales sur des segments !

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.
2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(2+x)}$.
On remarquera que $1 = (x+2)-(x+1)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)dx$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}\,dx$.
5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
On remarquera que $1 = (1+x^2)-x^2$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, puis exprimer* I_{n+1} *en fonction de* I_n.
6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. *On posera* $u = e^x$.
7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$. *On posera* $u = 1/t$.

Exercice 5. Montrer que les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\,dx$ convergent et calculer leurs valeur.

On pourra montrer que $I = J$ et calculer $I + J$.

Exercice 6. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Posons $I(n,p) = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln^p(x)\,dx$.

1) Montrer que l'intégrale $I(n,p)$ converge.
2) Déterminer une relation entre $I(n,p+1)$ et $I(n,p)$.
3) En déduire une expression de $I(n,p)$.

III Fonctions et suites définies à partir d'intégrales généralisées

Exercice 7 (Fonction Gamma d'Euler).
La fonction Gamma d'Euler est la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt.$$

1) Montrer que l'ensemble de définition de Γ est bien $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3) En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) Écrire une fonction Scilab qui prend en entrée $\mathtt{x}$ et qui renvoie une approximation de $\Gamma(\mathtt{x})$ avec la méthode des rectangles.

Exercice 8.

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt$ converge.
2) Montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f'.
3)
   a) Montrer que $g : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{1 - e^{-t^2}}{t}\,dt$ admet une limite finie à droite en 0.
   b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = -\ln(x) - f(x) + f(1)$.
   c) En déduire que $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}}$.

1) Justifier que l'intégrale I_n converge.
2) Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
   En déduire une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ sur $\mathbb{R}_+$.
   On pourra aussi utiliser le fait que $x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4$.
3) Calculer I_0 et exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \ln(\sqrt[3]{n} I_n)$.
   a) Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (v_{n+1} - v_n)$.
   b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $I_n \sim \dfrac{A}{\sqrt[3]{n}}$.

Exercice 10.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{x^n - 1}\,dx$ converge.
2) A l'aide du changement de variable $y = x^n$ dans l'expression de I_n, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$ converge.

IV Exercices plus théoriques

Exercice 11. Soit f une fonction positive et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si la suite $\displaystyle\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ce résultat reste-t-il vrai si on ne suppose pas que f est positive (on analysera les deux sens de l'équivalence).

Exercice 12. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs positives qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$.

1) Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = 0$.
2) Le résultat persiste-t-il si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge ?

Exercice 13. Rappelons que, si $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est une série convergente, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'analogue de cette propriété pour les intégrales généralisées : si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge a-t-on $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

1) Supposons que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(t)\big)^2\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f'(t)\big)^2\,dt$ convergent.
   a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)\,dt$ converge.
   b) En déduire que f^2 admet une limite finie en $+\infty$ puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2) Supposons que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. En encadrant $f(x)$ par deux intégrales, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 + 2^n(x-n) & \text{si il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x \in [n-2^{-n}, n], \\ 1 + 2^n(n-x) & \text{si il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x \in [n, n+2^{-n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
   c) Montrer par l'absurde que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$..