Correction du TD 26

I Calculs de développements limités

Exercice 1. En utilisant l'exercice 4 de la feuille d'exercice n° 24, montrer que

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8).$$

Correction : La fonction $\tan$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$. On a vu en exercice (cf. feuille de TD 24) que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

On a $a_0 = 0$, $a_1 = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$. Ensuite

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_0a_1 + a_1a_0) = 0, \qquad a_3 = \frac{1}{3}(a_0a_2 + a_1^2 + a_2a_0) = \frac{1}{3}, \qquad a_4 = \frac{1}{4}(a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0) = 0$$

$$a_5 = \frac{1}{5}(a_0a_4 + a_1a_3 + a_2^2 + a_3a_1 + a_4a_0) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{15},$$

$$a_6 = \frac{1}{6}(a_0a_5 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_3a_2 + a_4a_1 + a_5a_0) = 0,$$

$$a_7 = \frac{1}{7}(a_0a_6 + a_1a_5 + a_2a_4 + a_3^2 + a_4a_2 + a_5a_1 + a_6a_0) = \frac{1}{7}\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{9} + \frac{2}{15}\right) = \frac{17}{315}.$$

D'où le résultat d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 7.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Soit f une fonction paire sur $]-a, a[$ admettant un $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$: $f(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k + o(x^{2n+1})$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_{2k+1} = 0$.
2) Soit f une fonction impaire sur $]-a, a[$ admettant un $\mathrm{DL}_{2n}(0)$: $f(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k + o(x^{2n})$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_{2k} = 0$.

Correction :

1) Au voisinage de 0, on a

$$f(x) = f(-x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k(-x)^k + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k(-1)^k x^k + o(x^{2n+1}).$$

Par unicité du $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de f on a donc $a_k = a_k(-1)^k$ pour tout $k \in [\![0, 2n+1]\!]$. Pour les entiers k impairs de $k \in [\![0, 2n+1]\!]$, on a alors $a_k = -a_k$ et donc $a_k = 0$.

2) Au voisinage de 0, on a

$$f(x) = -f(-x) \underset{0}{=} -\sum_{k=0}^{2n} a_k(-x)^k + o(x^{2n}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n} a_k(-1)^{k+1} x^k + o(x^{2n}).$$

Par unicité du $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de f on a donc $a_k = a_k(-1)^{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$. Pour les entiers k pairs de $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a alors $a_k = -a_k$ et donc $a_k = 0$.

Exercice 3. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ afin que $e^x - \dfrac{1+ax}{1+bx} = o(x^2)$.

Correction :

- D'un côté on a : $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- De l'autre on a :

$$\frac{1+ax}{1+bx} \underset{0}{=} (1+ax)\big(1-bx+b^2x^2+o(x^2)\big) \underset{0}{=} 1-bx+b^2x^2+ax-abx^2+o(x^2) \underset{0}{=} 1+(a-b)x+b(b-a)x^2+o(x^2).$$

On prend donc $a = -b = \dfrac{1}{2}$ de telle sorte que $a-b=1$ et $b(b-a) = \dfrac{1}{2}$ et donc que $\dfrac{1+ax}{1+bx} \underset{0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.

Exercice 4. Déterminer le développement limité en 0 des fonctions suivantes à tout ordre :

$$1)\ x \longmapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad 2)\ x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2x}, \quad 3)\ x \longmapsto (1-x)\sin(x), \quad 4)\ x \longmapsto x\cos(x) - \sin(x).$$

Correction :

1) Traité en cours.
2) Remarquons que la fonction est paire... Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{2x} &\underset{0}{=} \frac{1}{2x}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) - \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-x)^k}{k!} - o(x^{2n+1})\right) \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{1-(-1)^k}{2}\frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{x}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} \sum_{j=0}^{n}\frac{x^{2j}}{(2j+1)!} + o(x^{2n}).
\end{aligned}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^j\frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{et} \qquad x\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^j\frac{x^{2j+2}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+3}).$$

Ainsi

$$(1-x)\sin(x) = \sin(x) - x\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^j\frac{x^{2j+1}-x^{2j+2}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^j\frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{et} \qquad x\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^j\frac{x^{2j+1}}{(2j)!} + o(x^{2n+2}).$$

Ainsi

$$x\cos(x) - \sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^j\left(\frac{1}{(2j)!} - \frac{1}{(2j+1)!}\right)x^{2j+1} + o(x^{2n+2}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^j\frac{2jx^j}{(2j+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

Exercice 5. Déterminer les développements limités en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué. On montrera que ces fonctions sont dérivables en 0 et on précisera leur dérivée en 0.

1) $x \longmapsto \sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[6]{1+4x}$ à l'ordre 3,
2) $x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$ à l'ordre 6,
3) $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$ à l'ordre 5,
4) $x \longmapsto x\,e^{x^2}\sin(x)$ à l'ordre 4,
5) $x \longmapsto (1+x^2)\cos(x)$ à l'ordre 6,
6) $x \longmapsto \ln(1-x^2) - 2\cos(x)$ à l'ordre 4,
7) $x \longmapsto \cos(x)\sqrt[5]{1+x}$ à l'ordre 3,
8) $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 4,
9) $x \longmapsto \dfrac{2}{1-x+x^3}$ à l'ordre 5,
10) $x \longmapsto e^{(1-x)^2}$ à l'ordre 3,
11) $x \longmapsto \ln(1+x-x^3)$ à l'ordre 4,
12) $x \longmapsto \cos(x-x^2)$ à l'ordre 5,
13) $x \longmapsto \sin(x)\,\mathrm{Arctan}(x)$ à l'ordre 5,
14) $x \longmapsto \dfrac{\cos^2(x)}{1+3x+x^2}$ à l'ordre 5,
15) $x \longmapsto (\ln(1-x))^3$ à l'ordre 6,
16) $x \longmapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9,
17) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x-x^3)}{\sqrt{1-x+2x^2}}$ à l'ordre 4,
18) $x \longmapsto e^{-1/x^4}$ à l'ordre 2018.

Correction : A chaque question, notons f la fonction dont on cherche le DL.

1) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{2x^2}{3} - \dfrac{20x^3}{9} + o(x^3)$.
2) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$.
3) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} -x + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$.
4) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} x^2 + \dfrac{5x^4}{6} + o(x^6)$.
5) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{11x^4}{24} + \dfrac{29x^6}{720} + o(x^6)$.
6) On trouve $f(x) \underset{0}{=} -2 - \dfrac{7x^4}{12} + o(x^4)$.
7) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x}{5} - \dfrac{29x^2}{50} - \dfrac{13x^3}{250} + o(x^3)$.
8) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^4}{8} + o(x^4)$,
9) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 2 + 2x + 2x^2 - 2x^4 - 4x^5 + o(x^5)$.
10) On trouve $f(x) \underset{0}{=} -2ex + 3ex^2 - \dfrac{10e}{3}x^3 + o(x^3)$.
11) On trouve $f(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^4}{4} + o(x^4)$.
12) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3 - \dfrac{11x^4}{24} - \dfrac{x^5}{6} + o(x^5)$.
13) On trouve $f(x) \underset{0}{=} x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^5)$.
14) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 1 - 3x + 7x^2 - 18x^3 + \dfrac{142x^4}{3} - 124x^5 + o(x^5)$.
15) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} -x^3 - \dfrac{3x^4}{2} - \dfrac{7x^5}{4} - \dfrac{15x^6}{8} + o(x^6)$.
16) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} x^6 - x^8 + o(x^9)$.
17) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{37x^3}{24} - \dfrac{11x^4}{24} + o(x^4)$.
18) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} o(x^{2018})$.

Exercice 7. Déterminer les développements limités suivantes :

1) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ en 1 à l'ordre 3,
2) $x \longmapsto \ln(2+x)$ en -1 à l'ordre 5,
3) $x \longmapsto \cos(2x)$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 6,
4) $x \longmapsto 3-\sqrt{5-2x}-x$ en 2 à l'ordre 3.

Correction : Tous ont été traités en cours sauf le deuxième que voici :

$$\ln(2+(-1+h)) = \ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5} + o(h^5).$$

Ainsi

$$\ln(2+x) = \underset{x\to -1}{=} (x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{(x+1)^4}{4} + \frac{(x+1)^5}{5} + o((x+1)^5).$$

II Applications à la recherche d'équivalents

Exercice 8. Déterminer des équivalents simples en 0 des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto x + \mathrm{Arctan}(x) - 2\sin(x)$,
2) $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(1+x)} - \dfrac{1}{\sin(x^2)}$,
3) $x \longmapsto (1+x)^{\ln(x)/x} - x$,
4) $x \longmapsto x^x - (\sin(x))^x$.

Correction : Tous ont été traités en cours sauf le premier que voici. On écrit les DL de $x \longmapsto x+\mathrm{Arctan}(x)$ et de $x \longmapsto 2\sin(x)$ en 0 tant que les termes successifs s'annulent (on rappelle que l'on veut un équivalent donc il faut pousser le DL jusqu'à un ordre où le coefficient est non nul) puis on les soustrait pour conclure.

- $x + \mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=} 2x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$.
- $2\sin(x) \underset{0}{=} 2x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{5!} + o(x^5)$.

Ainsi $x + \mathrm{Arctan}(x) - 2\sin(x) \underset{0}{=} \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{2x^5}{5!} + o(x^5) \underset{0}{=} \dfrac{11}{60}x^5 + o(x^5)$ et donc $x + \mathrm{Arctan}(x) - 2\sin(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{11}{60}x^5$.

Exercice 9. Déterminer des équivalents simples des suites de terme général :

1) $e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$,
2) $\sqrt{n(1+4n)} - 2n - \dfrac{1}{4}$,
3) $-2 + (2n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$,
4) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$,
5) $3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) - \sqrt[3]{3+n^3}$,
6) $\dfrac{1}{n} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n\ln(n)}$.

Correction :

1) Traité en cours.
2) Traité en cours.
3) Attention il y a à la fois du n et du $\dfrac{1}{n}$. Il faut donc penser au préalable qu'il va falloir à aller à l'ordre $k+1$ dans le développement du logarithme si on veut de l'ordre k à la fin. Allons tout de suite à l'ordre 3 (pour avoir un ordre 2) :

$$\begin{aligned}
-2 + (2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\underset{+\infty}{=} -2 + (2n+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{+\infty}{=} -2 + 2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \cancel{\frac{1}{3n^3}} + o\left(\cancel{\frac{1}{n^3}}\right) \\
&\underset{+\infty}{=} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

D'où $-2 + (2n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n^2}$.

4) Traité en cours.

5) On écrit les développements de $3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right)$ et de $\sqrt[3]{3+n^3}$ quand n tend vers $+\infty$ tant que les termes successifs s'annulent (on rappelle que l'on veut un équivalent donc il faut pousser le développement jusqu'à un ordre où le coefficient est non nul) puis on les soustrait pour conclure. On a

   - On a

$$\begin{aligned}3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) &\underset{+\infty}{=} 3n - 2n\left(1 - \frac{1}{2(n^{-3/2})^2} + \frac{1}{4(n^{-3/2})^4} + o\left(\frac{1}{(n^{-3/2})^4}\right)\right)\\ &\underset{+\infty}{=} n + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{12n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\end{aligned}$$

   - et

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{3+n^3} = n\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}} &\underset{+\infty}{=} n\left(1 + \frac{1}{3}\frac{3}{n^3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n^3}\right)^2 + o\left(\frac{1}{(n^3)^2}\right)\right)\\ &\underset{+\infty}{=} n + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right).\end{aligned}$$

   Ainsi $3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) - \sqrt[3]{3+n^3} \underset{+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{12}\right)\frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$ et donc

$$3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) - \sqrt[3]{3+n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{11}{12n^2}.$$

6) Celui-ci est plus difficile. L'idée est de mettre $\frac{1}{n}$ en facteur pour se ramener un terme du type $1 - e^{u_n}$. On a, pour n assez grand :

$$\frac{1}{n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n\ln(n)} = \frac{1}{n} - \exp\left(-n\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(1 - e^{u_n}\right),$$

avec $u_n = -n\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n)$. Cherchons alors un développement asymptotique de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. On a

$$\begin{aligned}u_n = \ln(n)\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right) &\underset{+\infty}{=} \ln(n)\left(-n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+1\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \ln(n)\left(-1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)+1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.\end{aligned}$$

Par croissances comparées, on a alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\frac{1}{n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n\ln(n)} = \frac{1}{n}\left(1 - e^{u_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n}{n}.$$

Finalement

$$\frac{1}{n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n\ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}.$$

III Applications à la recherche de limites

Exercice 11. Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage de 0. Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(5x)-3f(4x)+7f(x)-5f(0)}{x^2}.$$

Correction : Etant donné le terme x^2 au dénominateur, on est poussé à déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ du numérateur. Puisque f est de classe C^2, la formule de Taylor-Young entraîne que

$$f(h) \underset{t\to 0}{=} f(0)+hf'(0)+f''(0)\frac{h^2}{2}+\left(h^2\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&f(5x)-3f(4x)+7f(x)-5f(0)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(f(0)+5xf'(0)+f''(0)\frac{(5x)^2}{2}+\left(x^2\right)\right)-3\left(f(0)+4xf'(0)+f''(0)\frac{(4x)^2}{2}+\left(x^2\right)\right)\\
&\qquad\qquad +7\left(f(0)+xf'(0)+f''(0)\frac{x^2}{2}+\left(x^2\right)\right)-5f(0)\\
&= 15f''(0)x^2+o(x^2).
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(5x)-3f(4x)+7f(x)-5f(0)}{x^2}=15f''(0)$.

Exercice 12. Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^4\left(2\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\ln(n+1)-\ln(n-1)+2\ln(n)-2e^{1/n^4}\right)$,

2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$, 3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^{2+1/x^3}-x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, 4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2-x}-1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

Correction :

1) Traité en cours.
2) Traité en cours.
3) On a

$$2+x^{1/x^3}-x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)=x^2\left(x^{1/x^3}-x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x^2\left(e^{\ln(x)/x^3}-x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Étant donné le x^2 en facteur, pour obtenir une limite finie, on cherche un développement asymptotique à l'ordre 2 en $+\infty$ de l'autre terme en facteur. On a $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{=}x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\underset{+\infty}{=}1-\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. De plus, par croissances comparées, $\frac{\ln(x)}{x^3}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Ainsi $e^{\ln(x)/x^3}\underset{+\infty}{=}1+\frac{\ln(x)}{x^3}+o\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)\underset{+\infty}{=}1+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Nous en déduisons que

$$2+x^{1/x^3}-x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{=}x^3\left(1+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-1+\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\underset{+\infty}{=}\frac{1}{6}+o(1).$$

Cela signifie que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^{2+1/x^3}-x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{6}$.

4) On a $e^{x^2-x}-1 = e^{x(x-1)}-1 \underset{1}{\sim} x(x-1)$ puisque $x(x-1) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $e^{x^2-x}-1 \underset{1}{\sim} x-1$.

Ensuite $\cos\left(\dfrac{\pi(1+h)}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi h}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi h}{2}\right) \underset{h\to 0}{\sim} -\dfrac{\pi h}{2}$. Ainsi $\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \underset{x\to 1}{\sim} -\dfrac{\pi(x-1)}{2}$.
Nous en déduisons que

$$\frac{e^{x^2-x}-1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{x-1}{-\frac{\pi(x-1)}{2}} \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{2}{\pi}.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2-x}-1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = -\dfrac{2}{\pi}$.

Exercice 13. A l'aide de développements limités, montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sin(2x)} - \dfrac{\cos(x)}{2x}$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0.

Correction :

- Les fonctions $x \longmapsto \sin(2x)$, $\cos$, $x \longmapsto e^{-x}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{2x}$ sont dérivables sur $I\backslash\{0\}$. Il s'ensuit que f est dérivable sur $I\backslash\{0\}$ comme somme et produits de fonctions qui le sont.
- Maintenons regardons le comportement de f au voisinage de 0. On a

$$\frac{e^{-x}}{\sin(2x)} - \frac{\cos(x)}{2x} = \frac{2xe^{-x}-\sin(2x)\cos(x)}{2x\sin(2x)} \underset{0}{\sim} \frac{2xe^{-x}-\sin(2x)\cos(x)}{4x^2}.$$

Pour montrer que f est prolongeable par continuité en 0 il faut et il suffit de montrer que f admet un $\mathrm{DL}_0(0)$. Étant donné le x^2 dénominateur, il s'agit donc de trouver un $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction du numérateur. On a

— $2xe^{-x} \underset{0}{=} 2x\left(1-x+o(x)\right) \underset{0}{=} 2x-2x^2+o(x^2)$,

— $\cos(x)\sin(2x) \underset{0}{=} \left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(2x+o(x^2)\right) \underset{0}{=} 2x+o(x^2)$,

donc $2xe^{-x}-\sin(2x)\cos(x) \underset{0}{=} -2x^2+o(x^2) \underset{0}{\sim} -2x^2$. Par conséquent $\dfrac{e^{-x}}{\sin(2x)} - \dfrac{\cos(x)}{2x} \underset{0}{\sim} \dfrac{-2x^2}{4x^2} \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$.
Nous en déduisons que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = -\dfrac{1}{2}$.

- Pour montrer que f, ainsi prolongée, est dérivable en 0, cherchons à établir que $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ admet une limite en 0. On a

$$f(x)-f(0) = \frac{2xe^{-x}-\sin(2x)\cos(x)+x\sin(2x)}{2x\sin(2x)} \underset{0}{=\sim} \frac{2xe^{-x}-\sin(2x)\cos(x)+x\sin(2x)}{4x^2}.$$

On a ensuite

— $2xe^{-x} \underset{0}{=} 2x\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \underset{0}{=} 2x-2x^2+x^3+o(x^3)$,

— $(x-\cos(x))\sin(2x) \underset{0}{=} \left(-1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\left(2x-\dfrac{(2x)^3}{6}+o(x^3)\right) \underset{0}{=} -2x+2x^2+\dfrac{7x^3}{3}+o(x^3)$,

donc $2xe^{-x}+(x-\cos(x))\sin(2x) \underset{0}{=} 2x-2x^2+x^3+o(x^3)-2x+2x^2+\dfrac{7x^3}{3}+o(x^3) \underset{0}{=} \dfrac{10x^3}{3}+o(x^3) \underset{0}{\sim} \dfrac{10x^3}{3}$.
Nous en déduisons que

$$f(x)-f(0) \underset{0}{\sim} \frac{\frac{10x^3}{3}}{4x^2} \underset{0}{\sim} \frac{5x}{6}.$$

Ainsi $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{5}{6}$. Nous en déduisons que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{5}{6}$.

On aurait pu chercher tout de suite un $\mathrm{DL}_1(0)$ *de* f *mais c'est plus compliqué car cela demande d'inverser un développement limité... ce qui est hors-programme. Mais je le fais quand même pour votre culture. On reprend à la formule*

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-x}}{\sin(2x)} - \frac{\cos(x)}{2x} &= \frac{2xe^{-x} - \sin(2x)\cos(x)}{2x\sin(2x)} \\
&\underset{0}{=} \frac{-2x^2 + \dfrac{10x^3}{3} + o(x^3)}{4x^2 + o(x^2)} \\
&\underset{0}{=} \left(-\frac{1}{2} + \frac{5x}{6} + o(x)\right)\frac{1}{1+o(x)} \\
&\underset{0}{=} \left(-\frac{1}{2} + \frac{5x}{6} + o(x)\right)(1+o(x)) \underset{0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{5x}{6} + o(x)
\end{aligned}$$

et voilà !

IV Développements asymptotiques et étude d'asymptotes

Exercice 16. Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation. On précisera également la position de la courbe par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

1) $x \longmapsto (2x-1)e^{-3/x}$,
2) $x \longmapsto \sqrt[3]{8x^3 + 7x^2 - 3x + 1}$,
3) $x \longmapsto \sqrt{x^4 + 2x + 5} - x^2 e^{1/x}$,
4) $x \longmapsto (x^2+2)\ln\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)$,
5) $x \longmapsto \dfrac{x^5(1-e^{-1/x})}{(1+x)^3}$.

Correction : Le but ici est de trouver $(a, b, p, a_p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^*$ tel que $f(x) = \underset{+\infty}{=} ax + b + \dfrac{a_p}{x^p} + o\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$.

1) *Avant de commencer on réfléchit un peu : au minimum* $p = 1$*. Pour obtenir tous les termes en* $\dfrac{1}{x}$ *il faut au moins aller à l'ordre 2 dans le développement asymptotique de* $x \mapsto e^{-3/x}$*. En effet les termes en* $\dfrac{1}{x^2}$ *vont devenir des termes en* $\dfrac{1}{x}$ *quand on va les multiplier par* $2x$ *en développant. Ce serait une faute grave de les oublier !*

   On a $e^{-3/x} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-3}{x}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
f(x) = (2x-1)e^{-3/x} &\underset{+\infty}{=} (2x-1)\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{+\infty}{=} 2x - 6 + \frac{9}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 + \frac{3}{x} - \cancel{\frac{9}{2x^2}} + o\left(\cancel{\frac{1}{x^2}}\right) \\
&\underset{+\infty}{=} 2x - 7 + \frac{12}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

   Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 2x - 7$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

2) Traité en cours : $f(x) \underset{+\infty}{=} 2x + \dfrac{7}{12} - \dfrac{121}{288x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 2x + \dfrac{7}{2}$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

3) *Avant de commencer on réfléchit un peu : déjà il faut faire apparaitre des termes en* $\dfrac{1}{x}$ *dans la racine pour se ramener à des* DL *usuels en* 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x) = \sqrt{x^4+2x+5} - x^2 e^{1/x} = \sqrt{x^4\left(1+\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}\right)} - x^2 e^{1/x} = x^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}} - e^{1/x}\right) = x^2 g\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec $g : u \longmapsto \sqrt{1+u^3+5u^4} - e^u$.

Étant donné le x^2 en facteur, pour avoir au moins l'ordre 1, il faut pousser le développement asymptotique de $x \mapsto g\left(\frac{1}{x}\right)$ (et donc le DL de g en 0) à l'ordre 3.

On a

$$g(u) \underset{u\to 0^+}{=} \left(1+\frac{1}{2}(2u^3+5u^4)+o(u^3)\right) - \left(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right) \underset{u\to 0^+}{=} -u-\frac{u^2}{2}+\frac{5u^3}{6}+o(u^3).$$

Ainsi

$$f(x) = x^2 g\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x^2\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{5}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} -x-\frac{1}{2}+\frac{5}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y=-x-\frac{1}{2}$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

4) Traité en cours : $f(x) \underset{+\infty}{=} -3x+\frac{9}{2}-\frac{15}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$. Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y=-3x+\frac{9}{2}$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

5) *Avant de commencer on réfléchit un peu : déjà il faut faire apparaitre des termes en $\frac{1}{x}$ dans le quotient pour se ramener à un DL usuel en 0.*

On a

$$\frac{x^5(1-e^{-1/x})}{(1+x)^3} = \frac{x^5(1-e^{-1/x})}{x^3\left(\frac{1}{x}+1\right)^3} = x^2(1-e^{-1/x})\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-3} = x^2 g\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec $g : u \longmapsto (1-e^{-u})(1+u)^{-3}$.

Étant donné le x^2 en facteur, pour avoir au moins l'ordre 1, il faut pousser le développement asymptotique de $x \mapsto g\left(\frac{1}{x}\right)$ (et donc le DL de g en 0) à l'ordre 3.

On a

$$\begin{aligned}
g(u) &\underset{u\to 0^+}{=} \left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right)\left(1-3u+(-3)(-4)\frac{u^2}{2}+(-3)(-4)(-5)\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right)\\
&\underset{u\to 0^+}{=} \left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right)\left(1-3u+6u^2-10u^3+o(u^3)\right)\\
&\underset{u\to 0^+}{=} u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}-3u^2+\frac{3u^3}{2}+6u^3+o(u^3)\\
&\underset{u\to 0^+}{=} u-\frac{7u^2}{2}+\frac{23u^3}{3}+o(u^3).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x) = x^2 g\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{7}{2x^2}+\frac{23}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x-\frac{7}{2}+\frac{23}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y=x-\frac{7}{2}$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 17.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $x_n + \sqrt[3]{x_n} = n$.
2) Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x_n - n$. Montrer que $y_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}$.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $z_n = y_n + \sqrt[3]{n}$. Déterminer un équivalent de z_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) En déduire un développement asymptotique à trois termes de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On a déjà fait ce type d'exercices dans la feuille de TD n^o 19. N'hésitez pas à les aborder de nouveau avec l'outil des développements limités.

Correction :

1) Le fonction $f : x \longmapsto x + \sqrt[3]{x}$ est continue est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (comme somme de deux fonctions qui le sont). On a $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Le théorème de la bijection entraîne donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui même. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$, tel que $n = f(x_n)$.
2) On a $x_n = f^{-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, pour n assez grand, $x_n > 0$ et
$$\frac{n}{x_n} = 1 + \frac{\sqrt[3]{x_n}}{x_n} = 1 + \frac{1}{x_n^{2/3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Par conséquent $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n = y_n + n$ donc $y_n + \sqrt[3]{y_n + n} = 0$ et donc, en divisant par $\sqrt[3]{n}$ pour $n \geqslant 1$, on obtient
$$\frac{y_n}{\sqrt[3]{n}} = -\sqrt[3]{1 + \frac{y_n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$$
car $\dfrac{y_n}{n} = \dfrac{x_n}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $y_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}$.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y_n = z_n - \sqrt[3]{n}$ donc $z_n - \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n + z_n + \sqrt[3]{n}} = 0$. Divisons par $\sqrt[3]{n}$ pour $n \geqslant 1$:
$$\frac{z_n}{\sqrt[3]{n}} = 1 - \sqrt[3]{1 + \frac{z_n}{n} + \frac{1}{n^{2/3}}}.$$
Or $\dfrac{z_n}{\sqrt[3]{n}} = \dfrac{y_n}{\sqrt[3]{n}} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 0$ donc $\dfrac{z_n}{n} = o\left(\dfrac{1}{n^{2/3}}\right)$. Nous en déduisons que $\dfrac{z_n}{n} + \dfrac{1}{n^{2/3}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2/3}}$ et donc
$$\frac{z_n}{\sqrt[3]{n}} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{3n^{2/3}}.$$
Finalement $z_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{n}}$.
   c) On a $x_n = y_n + n = n + z_n + \sqrt[3]{n} \underset{+\infty}{=} n + \sqrt[3]{n} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

V Autres applications des développements limités

Exercice 18 (on reprend les mêmes et on recommence). Les développements limités permettent de simplifier quelques problèmes que nous avons rencontrés (et que l'on a traité à l'aide d'inégalités).

1) **Règle de Raab-Duhamel** (exercice 16 du TD n^o 20).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $(\alpha, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(v_{n+1} - v_n)$.

b) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

2) **Formule de Stirling** (DM n° 12).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{\sqrt{n} n^n}{n! e^n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

a) Montrer que $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$. En déduire la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (v_{n+1} - v_n)$.

b) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

A l'aide de la formule de Wallis, on trouve que $C = \sqrt{2\pi}$.

Correction : **A VENIR**