Feuille d'exercice n° 26

Développements limités

I Calculs de développements limités

Exercice 1. En utilisant l'exercice 4 de la feuille d'exercice n° 24, montrer que

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8).$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Soit f une fonction paire sur $]-a, a[$ admettant un $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$: $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k + o(x^{2n+1})$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_{2k+1} = 0$.
2) Soit f une fonction impaire sur $]-a, a[$ admettant un $\mathrm{DL}_{2n}(0)$: $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k + o(x^{2n})$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_{2k} = 0$.

Exercice 3. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ afin que $e^x - \dfrac{1 + ax}{1 + bx} = o(x^2)$.

Exercice 4. Déterminer le développement limité en 0 des fonctions suivantes à tout ordre :

$$1)\ x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad 2)\ x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2x}, \quad 3)\ x \longmapsto (1-x)\sin(x), \quad 4)\ x \longmapsto x\cos(x) - \sin(x).$$

Exercice 5. Déterminer les développements limités en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué. On montrera que ces fonctions sont dérivables en 0 et on précisera leur dérivée en 0.

1) $x \longmapsto \sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[6]{1+4x}$ à l'ordre 3,
2) $x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$ à l'ordre 6,
3) $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$ à l'ordre 5,
4) $x \longmapsto x\, e^{x^2} \sin(x)$ à l'ordre 4,
5) $x \longmapsto (1+x^2)\cos(x)$ à l'ordre 6,
6) $x \longmapsto \ln(1-x^2) - 2\cos(x)$ à l'ordre 4,
7) $x \longmapsto \cos(x)\sqrt[5]{1+x}$ à l'ordre 3,
8) $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 4,
9) $x \longmapsto \dfrac{2}{1-x+x^3}$ à l'ordre 5,
10) $x \longmapsto e^{(1-x)^2}$ à l'ordre 3,
11) $x \longmapsto \ln(1+x-x^3)$ à l'ordre 4,
12) $x \longmapsto \cos(x-x^2)$ à l'ordre 5,
13) $x \longmapsto \sin(x)\,\mathrm{Arctan}(x)$ à l'ordre 5,
14) $x \longmapsto \dfrac{\cos^2(x)}{1+3x+x^2}$ à l'ordre 5,
15) $x \longmapsto (\ln(1-x))^3$ à l'ordre 6,
16) $x \longmapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9,
17) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x-x^3)}{\sqrt{1-x+2x^2}}$ à l'ordre 4,
18) $x \longmapsto e^{-1/x^4}$ à l'ordre 2018.

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Quel sens peut-on donner à l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt$? Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 6.

Exercice 7. Déterminer les développements limités suivantes :

1) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ en 1 à l'ordre 3,
2) $x \longmapsto \ln(2+x)$ en -1 à l'ordre 5,
3) $x \longmapsto \cos(2x)$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 6,
4) $x \longmapsto 3 - \sqrt{5-2x} - x$ en 2 à l'ordre 3.

II Applications à la recherche d'équivalents

Puisque la composition (et l'inversion) de développement limité est censée être hors-programme, on pourra dans un premier temps mettre certaines expressions sous un même dénominateur et/ou factoriser par des termes bien choisis pour faire apparaitre des équivalents usuels.

Exercice 8. Déterminer des équivalents simples en 0 des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto x + \mathrm{Arctan}(x) - 2\sin(x)$,
2) $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(1+x)} - \dfrac{1}{\sin(x^2)}$,
3) $x \longmapsto (1+x)^{\ln(x)/x} - x$,
4) $x \longmapsto x^x - (\sin(x))^x$.

Exercice 9. Déterminer des équivalents simples des suites de terme général :

1) $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$,
2) $\sqrt{n(1+4n)} - 2n - \dfrac{1}{4}$,
3) $-2 + (2n+1)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$,
4) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$,
5) $3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) - \sqrt[3]{3+n^3}$,
6) $\dfrac{1}{n} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n\ln(n)}$.

III Applications à la recherche de limites

Exercice 10. Déterminer les limites en 0 (si elles existent) des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{e^x}{\ln(1+x)}$,
2) $x \longmapsto \dfrac{2}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{1-\cos(x)}$,
3) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt[5]{1+2x} - \sqrt[7]{1-3x}}{\tan(x)}$
4) $x \longmapsto \dfrac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - x}$

Exercice 11. Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage de 0. Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(5x) - 3f(4x) + 7f(x) - 5f(0)}{x^2}.$$

Exercice 12. Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^4\left(2\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \ln(n+1) - \ln(n-1) + 2\ln(n) - 2e^{1/n^4}\right)$,
2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$,
3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^{2+1/x^3} - x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$,
4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2-x}-1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

Exercice 13. A l'aide de développements limités, montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sin(2x)} - \dfrac{\cos(x)}{2x}$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0.

Exercice 14.

1) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est de classe C^1 (et même deux fois dérivable) sur $I =]-\pi, \pi[$.
2) Déterminer l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f et donner la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.

IV Développements asymptotiques et étude d'asymptotes

Exercice 15 (Arctan au voisinage de $+\infty$).

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
2) Donner le développement asymptotique de $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}$ à l'ordre 7 en $+\infty$.
3) Donner un équivalent de $\big(\operatorname{Arctan}(nu_n)\big)^n$ en $+\infty$ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.
4) Montrer que la courbe représentative de $x \longmapsto (x+1)e^{1/x}\operatorname{Arctan}(x)$ admet des asymptote en $\pm\infty$ dont on donnera l'équation (on précisera la position de la courbe par rapport à ces deux asymptotes au voisinage de $\pm\infty$).

Exercice 16. Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation. On précisera également la position de la courbe par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

1) $x \longmapsto (2x-1)e^{-3/x}$,
2) $x \longmapsto \sqrt[3]{8x^3 + 7x^2 - 3x + 1}$,
3) $x \longmapsto \sqrt{x^4 + 2x + 5} - x^2 e^{1/x}$,
4) $x \longmapsto (x^2+2)\ln\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)$,
5) $x \longmapsto \dfrac{x^5(1 - e^{-1/x})}{(1+x)^3}$.

Exercice 17.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $x_n + \sqrt[3]{x_n} = n$.
2) Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x_n - n$. Montrer que $y_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}$.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $z_n = y_n + \sqrt[3]{n}$. Déterminer un équivalent de z_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) En déduire un développement asymptotique à trois termes de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On a déjà fait ce type d'exercices dans la feuille de TD n° 19. N'hésitez pas à les aborder de nouveau avec l'outil des développements limités.

V Autres applications des développements limités

Exercice 18 (on reprend les mêmes et on recommence). Les développements limités permettent de simplifier quelques problèmes que nous avons rencontrés (et que l'on a traité à l'aide d'inégalités).

1) **Règle de Raab-Duhamel** (exercice 16 du TD n° 20).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $(\alpha, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(v_{n+1} - v_n)$.
   b) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.
2) **Formule de Stirling** (DM n° 12).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{\sqrt{n}n^n}{n!e^n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.
   a) Montrer que $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(v_{n+1} - v_n)$.
   b) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

A l'aide de la formule de Wallis, on trouve que $C = \sqrt{2\pi}$.