

Feuille d'exercice n° 25

Comparaison locale de fonctions

Exercice 1. Parmi les fonctions f et g suivantes, laquelle est négligeable devant l'autre ?

- 1) $f : x \mapsto x \sin(x) \tan(x)$ et $g : x \mapsto (e^x - 1)^2$ en 0 ,
- 2) $f : x \mapsto (\ln(x))^2$ et $g : x \mapsto x \ln(\ln(x))$ en $+\infty$,
- 3) $f : x \mapsto x^5$ et $g : x \mapsto e^{-1/\sqrt{x}}$ en 0^+ ,
- 4) $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x}) \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$ et $g : x \mapsto \ln(x^3) \sin^2\left(\frac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.

Exercice 2. Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes :

- 1) $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)$ en $+\infty$.
- 2) $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\ln(x))$ en 1 .
- 3) $x \mapsto (x^4 - 3x^2 + 7)e^{1/x}$ en $+\infty$,
- 4) $x \mapsto \sqrt[3]{x} - 1$ en 1 ,
- 5) $x \mapsto \sqrt{\frac{8x^5 + 3x^4 + 5x + 1}{2x^3 - 5x^2 + 2018}}$ en $+\infty$,
- 6) $x \mapsto e^x - e^{-x}$ en 0 ,
- 7) $x \mapsto e^{x^2} - \cos(x)$ en 0 ,
- 8) $x \mapsto (x + \operatorname{Arctan}(\sqrt{x}))$ en 0 ,
- 9) $x \mapsto \sqrt{6+x} - 3$ en 3 ,
- 10) $x \mapsto \ln\left(\cos\left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\right)$ en $+\infty$,
- 11) $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}$ en $+\infty$,
- 12) $x \mapsto \frac{x^2 + \ln(x)}{5 + xe^{-x}}$ en 0^+ puis en $+\infty$,
- 13) $x \mapsto x\sqrt[5]{\ln(1+x)}$ en 0^+ puis en $+\infty$,
- 14) $x \mapsto \ln(2 \sin(x))$ en $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x+1} \ln\left(1 - \frac{\sqrt{3x+1}}{7x+4}\right)$,
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \tan\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\sqrt{x}}$,
- 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin\left(\frac{5x^2}{7x^3 + 3x^2 + 1}\right)$,
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)(e^{\cos(1/x)} - e)$,
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \ln(\tan(x))$,
- 8) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$,
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^2(x)}{\tan(x)(1 - \cos(x))}$,
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}} - \sqrt[3]{x}\right)$,
- 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)}$.
- 12) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan(x))^{1/(4x-\pi)}$.

Exercice 4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \tan^3(x) + e^x - 1}{\sqrt[5]{1+x+x^2} - 1 - e^{-1/x}} \sqrt{\frac{2x^2 - 3x^4}{x^7 + 8x^2}}$.