# Correction de quelques exercices de la feuille de TD 24

**Exercice 1.** Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $C^\infty$ sur des intervalles (à préciser) et calculer leurs dérivées successives.

$$1)\ x \longmapsto \frac{1}{3+x}, \qquad 2)\ x \longmapsto \ln(3+x), \qquad 3)\ x \longmapsto e^{-3x}, \qquad 4)\ x \longmapsto x^2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

***Correction :***

1) En tant qu'inverse de fonction de classe $C^\infty$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3+x}$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}$, on a

$$f'(x) = \frac{-1}{(3+x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(3+x)^3}, \qquad f^{(3)}(x) = \frac{-3!}{(3+x)^4}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{4!}{(3+x)^5}, \qquad \cdots$$

Une récurrence immédiate montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(3+x)^{n+1}}.$$

2) La fonction $g : x \longmapsto \ln(3+x)$ est de classe $C^\infty$ sur $]-3,+\infty[$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall x \in\, ]-3,[, \qquad g^{(n)}(x) = (g')^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(3+x)^n}.$$

3) La fonction $h : x \longmapsto e^{-3x}$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et une récurrence immédiate montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad h^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}.$$

4) Les fonctions $u : x \longmapsto x^2$ et $v : x \longmapsto \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $\varphi : x \longmapsto x^2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ aussi. De plus la formule de Leibniz entraîne que,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x) \\ &= x^2 v^{(n)}(x) + 2xnv^{(n-1)}(x) + n(n-1)v^{(n-2)}(x),\end{aligned}$$

les autres termes étant nuls puisque $u^{(k)} = 0$ pour tout $k \geqslant 3$. Ensuite une récurrence immédiate, montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad v^{(k)}(x) = \frac{1}{2^k}\cos^{(k)}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi^{(n)}(x) = \frac{x^2}{2^n}\cos^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2xn}{2^{n-1}}\cos^{(n-1)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}\cos^{(n-2)}\left(\frac{x}{2}\right).$$

- Si $n \equiv 0\,[4]$, alors $\cos^{(n)} = \cos$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi^{(n)}(x) = \frac{x^2}{2^n}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2xn}{2^{n-1}}\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

- Si $n \equiv 1\,[4]$, alors $\cos^{(n)} = -\sin$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi^{(n)}(x) = -\frac{x^2}{2^n}\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2xn}{2^{n-1}}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(et on vérifie au passage que cette formule reste vraie si $n = 1$).

- Si $n \equiv 2\,[4]$, alors $\cos^{(n)} = -\cos$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi^{(n)}(x) = -\frac{x^2}{2^n}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2xn}{2^{n-1}}\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

- Si $n \equiv 3\,[4]$, alors $\cos^{(n)} = \sin$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi^{(n)}(x) = \frac{x^2}{2^n}\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2xn}{2^{n-1}}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

**Exercice 2.** Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x\sin(x)$. Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = 2^{n/2}e^x\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$.

***Correction :*** La fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions qui le sont. Montrons la formule par récurrence sur $n$.

- On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(0)}(x) = f(x) = 2^{0/2}e^x\sin(x+0)$. Ainsi la formule est vraie au rang $0$.
- Supposons qu'elle est vrai au rang $n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = 2^{n/2}e^x\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) &= 2^{n/2}e^x\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + 2^{n/2}e^x\cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \\
&= 2^{(n+1)/2}e^x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\right) \\
&= 2^{(n+1)/2}e^x\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\right) \\
&= 2^{(n+1)/2}e^x\sin\left(x + \frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= 2^{(n+1)/2}e^x\sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$.

Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

**Exercice 8.** Factoriser le polynôme $X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 4X^2 + 13X + 6$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il possède une racine de multiplicité au moins 3.

***Correction :*** On dit nous affirme que $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 4X^2 + 13X + 6$ possède une racine réelle $a$ d'ordre au moins 3. On a donc $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$. Or $P' = 5X^4 - 8X^3 - 18X^2 + 8X + 13X$ et

$$P'' = 20X^3 - 24X^3 - 36X + 6 = 4(5X^3 - 6X^2 - 9X + 2).$$

On remarque que $-1$ est racine de $P''$. Et on vérifie aussi que $P(-1) = P'(-1) = 0$. Par ailleurs $P^{(3)} = 5(4X^3 - 16X - 9)$ donc $P^{(3)}(-1) \neq 0$. Par conséquent $-1$ est une racine de $P$ d'ordre de multiplicité 3. On a donc $(X+1)^3 | P$.

En effectuant par exemple une division euclidienne, on trouve que

$$P = (X+1)^3(X^2 - 5X + 6) = (X+1)^3(X-3)(X-2).$$

**Exercice 11.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit $P$ un polynôme de degré $n$ à coefficients réels dont toutes les dérivées successives en $a$ sont strictement positives. Montrer que $P$ ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$.

***Correction :*** La formule de Taylor pour les polynômes entraîne que

$$\forall x \in ]a, +\infty[, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k > 0.$$

puisque $P^{(k)}(a) > 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Enfin $P^{(0)}(a) = P(a) \neq 0$. Ainsi $P$ ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$

**Exercice 14.** Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

***Correction :*** La fonction $\sin$ est de classe $C^5$ sur $\mathbb{R}$. La formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre $4$ entraîne alors que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x) &= \sin(0) + \sin'(0)x + \sin''(0)\frac{x^2}{2} + \sin^{(3)}(0)\frac{x^3}{6} + \sin^{(4)}(0)\frac{x^4}{24} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24}\sin^{(5)}(t)\,dt \\ &= 0 + x - 0 - \frac{x^3}{6} + 0 + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24}\cos(t)\,dt.\end{aligned}$$

Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0, x]$ et donc

$$\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} = \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24}\cos(t)\,dt \geqslant 0.$$

De plus, puisque $\cos$ est majoré par $1$,

$$\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} = \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24}\cos(t)\,dt \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24}\,dt = \left[-\frac{(x-t)^5}{120}\right]_0^x = \frac{x^5}{120}.$$

D'où les deux inégalités.

**Exercice 15.** Déterminer les maxima et minima locaux des fonctions suivantes :

$$1)\ x \longmapsto x^5 - 15x^3 + 12, \qquad\qquad 2)\ x \longmapsto \ln\left(\frac{2018x}{1+x^2}\right).$$

***Correction :***

1) Traité en cours.
2) Cherchons les points critiques de la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\frac{2018x}{1+x^2}\right)$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}.$$

On a $f'(x) = 0$ si et seulement si $1 - x^2 = 0$ si et seulement si $x = 1$.

Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f''(x) = \frac{-2x^2(1+x^2) - (3x^2+1)(1-x^2)}{x^2(1+x^2)^2}.$$

Et on calcule que $f''(1) = -1 < 0$. Ainsi $1$ est un maximum local et c'est le seul extremum local de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 18.** Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $a > 0$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{n!}{a^n} \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(0) = 0.$$

1) Montrer que $f$ est nulle sur $]-a, a[$ puis sur $\left]-\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right[$.
2) Montrer que $f$ est la fonction nulle.

***Correction :*** **A VENIR** (exercice $\star\star\star$)