Feuille d'exercice n° 24

Dérivées successives et formules de Taylor

Exercice 1. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ sur des intervalles (à préciser) et calculer leurs dérivées successives.

$$1)\ x \longmapsto \frac{1}{3+x}, \qquad 2)\ x \longmapsto \ln(3+x), \qquad 3)\ x \longmapsto e^{-3x}, \qquad 4)\ x \longmapsto x^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Exercice 2. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x \sin(x)$. Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \longmapsto x^{n-1}\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \longmapsto (x-a)^n(x-b)^n$.
   b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 4. Soit $x \in \mathbb{R}\Big\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$. Montrer que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Exercice 5. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}.$$

2) En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $n+1$ points $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ vérifiant $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a_1, a_{n+1}[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Application : Si P désigne un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $n+1$ solutions.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les fonctions n fois dérivables telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$.

Exercice 8. Factoriser le polynôme $X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 4X^2 + 13X + 6$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il possède une racine de multiplicité au moins 3.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme

$$P_n = (n-1)X^{2n} - 2(2n-1)X^n + 2n^2X - (2n^2 - 3n + 1).$$

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\big((X-a)^k\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
On exprimera les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base en fonction des dérivées successives de P en a.

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels dont toutes les dérivées successives en a sont strictement positives. Montrer que P ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$.

Exercice 12. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 13. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + \dfrac{x}{5} - \dfrac{2x^2}{25} \leqslant \sqrt[5]{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{5} - \dfrac{2x^2}{25} + \dfrac{6x^3}{125}$.

Exercice 14. Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

Exercice 15. Déterminer les maxima et minima locaux des fonctions suivantes :

$$1)\ x \longmapsto x^5 - 15x^3 + 12, \qquad\qquad 2)\ x \longmapsto \ln\left(\frac{2018x}{1+x^2}\right).$$

Exercice 16. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \sin(xt^2)\, dt$.

1) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2) a) Montrer que, pour tous $t \in [0,1]$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\sin(yt^2) - \sin(xt^2)\right| \leqslant |y - x|$.
   b) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3) a) Montrer que, pour tous $t \in [0,1]$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\sin(yt^2) - \sin(xt^2) - (y-x)t^2\cos(xt^2)\right| \leqslant \frac{1}{2}|y-x|^2.$$

   b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 t^2\cos(xt^2)\, dt$.

Exercice 17. Soit $f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Notons $M_0 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$. L'objectif de cet exercice est de montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et d'obtenir une majoration de $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ à partir de M_0 et M_2.

1) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$,

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}, \qquad \text{et} \qquad \left|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\right| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}.$$

2) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2h}{2}$.
3) En déduire que f' est bornée et que $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 18. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle qu'il existe $a > 0$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{n!}{a^n} \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(0) = 0.$$

1) Montrer que f est nulle sur $]-a, a[$ puis sur $\left]-\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right[$.
2) Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 19 (Méthode de Newton). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ et à valeurs réelles vérifiant

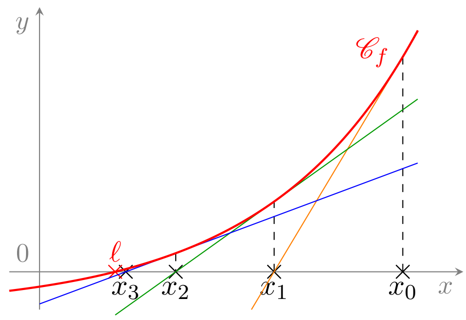
— Il existe $x^* \in]a,b[$ tel que $f(x^*) = 0$,

— f' ne s'annule pas sur $[a,b]$.

La méthode de Newton est un cas particulier de la méthode du point fixe dans le but de trouver une valeur approchée de la racine x_0. Elle se base sur la construction d'une suite récurrence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in I$ (« proche » de x^*) et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Interprétation graphique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est la solution de l'équation $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$, c'est-à-dire x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_n avec la droite des abscisses.



Supposons que f est de classe C^2 sur $[a,b]$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $|x_0 - x^*| \leqslant \varepsilon$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^* à vitesse quadratique, c'est-à-dire

$$\exists K > 0, \quad \exists \lambda \in]0,1[, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |x_n - x^*| \leqslant K\,\lambda^{2^n}.$$

1) Posons $\varphi : x \in [a,b] \longmapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Remarquer que x^* est un point fixe de φ.
2) Justifier l'existence de $m > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in [a,b]$, $|f'(x)| \geqslant m$ et $|f''(x)| \leqslant M$.
3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x) - x^*| \leqslant \dfrac{M}{2m}|x - x^*|^2$.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{M}{2m}|x_n - x^*|$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0^{2^n}$.
   b) Conclure

Cette méthode a été mise en œuvre avec Scilab *lors du TP n° 9.*