Correction de quelques exercices de la feuille de TD 23

I Somme d'espaces vectoriels et supplémentaire

Exercice 2. Notons E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles constantes et G l'ensemble des suites convergentes vers 0. Montrer que $E = F \oplus G$.

Correction : **A VENIR**

Exercice 4. Notons $F = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ est constante}\}$, $G_- = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ est nulle sur } [0,+\infty[\}$ et $G_+ = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ est nulle sur }]-\infty,0]\}$. Montrer que F, G_- et G_+ sont des s.e.v de $C^0(\mathbb{R})$ et que $C^0(\mathbb{R}) = F \oplus G_- \oplus G_+$.

Correction : On commence par vérifier que F, G_- et G_+ sont des s.e.v de $C^0(\mathbb{R})$. Je vous laisse le détailler. Montrons que $C^0(\mathbb{R}) = F \oplus G_- \oplus G_+$.

- Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. Posons $g_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto f(0)$,

$$g_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} f(t) - f(0) & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g_3 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} f(t) - f(0) & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

  On a $g_1 \in F$, $g_2 \in G_-$, $g_3 \in G_+$ et $f = g_1 + g_2 + g_3$. Ainsi $C^0(\mathbb{R}) = F + G_- + G_+$.
- Soient $f_1 \in F$, $f_2 \in G_-$, $f_3 \in G_+$ tels que $f_1 + f_2 + f_3$ est la fonction nulle. En évaluant en 0, on obtient $0 = f_1(0) + f_2(0) + f_3(0) = f_1(0)$. Puisque f_1 est constante, il s'agit donc de la fonction nulle. On évalue ensuite en $t \geqslant 0$ et on obtient que $0 = f_1(0) + f_2(t) + f_3(t) = f_3(t)$. Ainsi f_3 est nulle sur $[0,+\infty[$. Mais elle est aussi nulle sur $]-\infty,0]$ si bien qu'il s'agit elle aussi de la fonction nulle. Nous en déduisons que f_2 est la fonction nulle également. Par conséquent la somme est directe.

Nous avons montré que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique somme la somme d'une fonction constante, d'une fonction continue nulle sur $]-\infty,0]$ et d'une fonction continue nulle sur $[0,+\infty[$.

Exercice 5. Soit $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de s.e.v de E. Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) = \{0\}$.

Correction :

- Supposons que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe. Soit $k \in [\![2,n]\!]$ et $x \in F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1})$. Il existe $(x_1,\ldots,x_{k-1})$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_{k-1}$. On a donc $x_1 + \cdots + x_{k-1} + (-x) = 0$ et, puisque $(-x) \in F_k$, nous obtenons que $x_1 = \cdots = x_{k-1} = -x = 0$. Ainsi $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) = \{0\}$.
- Réciproquement supposons que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ ne soit pas directe. Il existe alors un vecteur $(x_1,\ldots,x_n)$ non nul dans $F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

  Notons k le plus grand entier compris entre 1 et n tel que $x_k \neq 0$ (et on a forcément $k \geqslant 2$ puisqu'au moins un des x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ est non nul). On a alors $0 = x_1 + \cdots + x_k$ et donc

$$x_k = -(x_1 + \cdots + x_{k-1}) \in F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1})$$

  tandis que $x_k \neq 0$. Nous venons de montrer que si $F_1 + \cdots + F_n$ n'est pas directe, alors il existe $k \in [\![2,n]\!]$ tel que $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) \neq \{0\}$. Par contraposée, si $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) = \{0\}$ pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, alors la somme est directe.

II Applications linéaires, image et noyau

Exercice 7. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires ?

1) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (xy,y,z) \end{array}$

2) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & 2018(x-y+z-t) \end{array}$

3) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-2P'(X) \end{array}$

4) $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$

5) $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2-3A+2\mathrm{I}_n \end{array}$

6) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (0,x+z,z-y,0,0,x+2z) \end{array}$

7) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t,u) & \longmapsto & (1,x+y,z+t,t+u) \end{array}$

8) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & a+b \\ -b & a-b & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

9) $\begin{array}{ccc} C^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 t\,f(t)\,dt \end{array}$

Correction : On note f ces applications. Sauf la dernière que l'on notera φ.

1) Traité en cours.
2) Traité en cours.
3) Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)(X+1)+2(\lambda P+Q)'(X) \\ &= \lambda P(X+1)+Q(X+1)+2(\lambda P'+Q')(X) \\ &= \lambda P(X+1)+Q(X+1)+2\lambda P'(X)+2Q'(X) \\ &= \lambda(P(X+1)-2P'(X))+Q(X+1)-2Q'(X) = \lambda f(P)+f(X). \end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$.

4) Traité en cours.
5) Traité en cours.
6) Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f\big(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')\big) &= f\big(\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z'\big) \\ &= \big(0,(\lambda x+x')+(\lambda z+z'),(\lambda z+z')-(\lambda y+y'),0,0,(\lambda x+x')+2(\lambda z+z')\big) \\ &= \big(0,\lambda(x+z)+(x'+z'),\lambda(z-y)+(z'-y'),0,0,\lambda(x+2z)+(x'+2z')\big) \\ &= \lambda(0,x+z,z-y,0,0,x+2z)+(0,x'+z',z'-y',0,0,x'+2z') \\ &= \lambda f(x,y,z)+f(x',y',z'). \end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^5)$.

7) Traité en cours.
8) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda(a,b)+(c,d)) = f(\lambda a+c,\lambda b+d) &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda a+c & \lambda b+d \\ -(\lambda a+c) & 0 & (\lambda a+c)+(\lambda b+d) \\ -(\lambda b+d) & (\lambda a+c)-(\lambda b+d) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda a & \lambda b \\ -\lambda a & 0 & \lambda a+\lambda b \\ -\lambda b & \lambda a-\lambda b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ -c & 0 & c+d \\ -d & c-d & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & a+b \\ -b & a-b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ -c & 0 & c+d \\ -d & c-d & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(a,b)+f(c,d) \end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

9) Notons φ l'application de cette question. Soient $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, $g \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi(\lambda f+g) = \int_0^1 t(\lambda f+g)(t)\,dt = \int_0^1 (\lambda t\lambda f(t) + tg(t))\,dt = \lambda\int_0^1 t\,f(t)\,dt + \int_0^1 t\,g(t)\,dt$$

donc $\varphi(\lambda f+g) = \lambda\varphi(f)+\varphi(g)$. Ainsi f est une forme linéaire sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 7. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $C^\infty(\mathbb{R})$?

$$1)\ f \longmapsto f' - 2f'' + 3f, \qquad 2)\ f \longmapsto \exp\circ f \qquad 3)\ f \longmapsto (\sin\times f)'$$

Correction :

1) Notons $\varphi : f \longmapsto f' - 2f'' + 3f$. Pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a $f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f'' \in C^\infty(\mathbb{R})$ donc $\varphi(f) = f' - 2f'' + 3f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

   Soient $(f,g) \in (C^\infty(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f+g) &= (\lambda f+g)' - 2(\lambda f+g)'' + 3(\lambda f+g)\\ &= (\lambda f'+g') - 2(\lambda f''+g'') + 3(\lambda f+g)\\ &= \lambda(f'-2f''+3f) + (g'-2g''+3g) = \lambda\varphi(f)+\varphi(g)\end{aligned}$$

   Ainsi φ est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R})$.

2) Notons $\varphi : f \longmapsto \exp\circ f$. Si f_1 désigne la fonction constante égale à 1, alors $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$. De pluq
   - $\varphi(2f_1) = \exp\circ(2f_1)$ est la fonction constante égale à e^2.
   - $2\varphi(f_1) = 2\,\exp\circ f_1$ est la fonction constante égale à $2e$.

   Ainsi $\varphi(2f_1) \neq 2\varphi(f_1)$ et donc φ n'est pas un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R})$.

3) Notons $\varphi : f \longmapsto (\sin\times f)' = f'\sin + f\cos$. On a $\cos \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\sin \in C^\infty(\mathbb{R})$ donc, pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a $\varphi(f) = f'\sin + f\cos \in C^\infty(\mathbb{R})$.

   Soient $(f,g) \in (C^\infty(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f+g) &= (\lambda f+g)'\sin + (\lambda f+g)\cos\\ &= (\lambda f'+g')\sin + (\lambda f+g)\cos\\ &= \lambda(f'\sin+f\cos) + (g'\sin+g\cos) = \lambda\varphi(f)+\varphi(g)\end{aligned}$$

   Ainsi φ est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (y-2z, 2x+y-4z, x+y-3z)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3) A-t-on $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$? Pouvait-on le prévoir ?

Correction :

1) Je vous laisse le faire....
2)
   - Puisque $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\big) = \mathrm{Vect}\big((0,2,1),(1,1,1),(-2,-4,-3)\big).$$

   On remarque que $-(0,2,1) - 2\cdot(1,1,1) = (-2,-4,-3)$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((0,2,1),(1,1,1)\big)$.

   Si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $\alpha(0,2,1)+\beta(1,1,1) = 0$, alors $\alpha = 0$, $2\alpha+\beta = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$. Ainsi $\big((0,2,1),(1,1,1)\big)$ est une famille libre. Nous en déduisons que $\big((0,2,1),(1,1,1)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) \quad & \iff \quad \begin{cases} \phantom{2x+{}} y - 2z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ \phantom{2x+{}} y - 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
& \iff \quad \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ \phantom{2x+{}} y - 2z = 0 \\ \phantom{2x+{}} y - 2z = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\
& \iff \quad \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ \phantom{2x+{}} y - 2z = 0 \\ \phantom{2x+y-{}} 0 = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
& \iff \quad \begin{cases} 2x + y = 4z \\ \phantom{2x+{}} y = 2z \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} \\
& \iff \quad (x,y,z) = z(1,2,1)
\end{aligned}
$$

  Ainsi $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((1,2,1))$.

3) Raisonnons par analyse/synthèse.
   - Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que

$$(x,y,z) = \underbrace{\alpha(0,2,1) + \beta(1,1,1)}_{\in \operatorname{Im}(f)} + \underbrace{\gamma(1,2,1)}_{\in \operatorname{Ker}(f)}$$

   On a alors

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} \phantom{2\alpha+{}} \beta + \gamma = x \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = y \\ \alpha + \beta + \gamma = z \end{cases} \\
\text{donc} \quad & \begin{cases} 2\alpha + \beta + 2\gamma = y \\ \phantom{2\alpha+{}} \beta + \gamma = x \\ \alpha + \beta + \gamma = z \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
\text{donc} \quad & \begin{cases} 2\alpha + \beta + 2\gamma = y \\ \phantom{2\alpha+{}} \beta + \gamma = x \\ \phantom{2\alpha+{}} \beta = 2z - y \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\
\text{donc} \quad & \begin{cases} 2\alpha + \beta + 2\gamma = y \\ \phantom{2\alpha+{}} \beta + \gamma = x \\ \phantom{2\alpha+\beta{}} - \gamma = 2z - y - x \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
\text{donc} \quad & \begin{cases} \alpha = -x + z \\ \beta = -y + 2z \\ \gamma = x + y - 2z \end{cases}
\end{aligned}
$$

   et donc

$$(x,y,z) = (-y+2z, -2x-y+4z, x-y+z) + (x+y-2z)(1,2,1).$$

   Ainsi, si il y a une décomposition, alors elle est unique.
   - Réciproquement, on vérifie que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\underbrace{(-y+2z, -2x-y+4z, -x-y+3z)}_{\in \operatorname{Im}(f)} + \underbrace{(x+y-2z)(1,2,1)}_{\in \operatorname{Ker}(f)} = (x,y,z)$$

- Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

On aurait pu remarquer que $(-f) \circ (-f) = (-f)$ $\rightsquigarrow$ EXERCICE.
Ainsi $-f$ est un projecteur et, d'après le cours, $\mathrm{Ker}(-f) \oplus \mathrm{Im}(-f) = \mathbb{R}^3$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 13. Soit $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^N$. Est-il injectif ?
2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f^k)$.
3) Montrer que f est surjectif.

Correction : **A VENIR**

Exercice 15. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Correction : cf. exercice 1 du DM n° 15.

Exercice 17. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$.

Cet exercice est un immense classique. Voici la démarche à suivre : le fait que, pour un $x \in E$ donné quelconque, la famille $(x, f(x))$ est liée signifie qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Le but de cet exercice est donc de montrer que λ_x ne dépend pas de x en fait.

1) *Soit (x, y) une famille libre. En s'intéressant à $x + y$, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.*
2) *Soit (x, y) une famille liée avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.*
3) *Conclure.*

Correction :

1) Supposons que (x, y) est une famille libre. Puisque f est linéaire, on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$ donc $\lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Ainsi $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$. Puisque (x, y) est libre, nous obtenons que $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ et $\lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$ et donc $\lambda_x = \lambda_y$.
2) Supposons que (x, y) est une famille liée avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Il existe alors $\alpha \neq 0$ tel que $x = \alpha y$. Puisque f est linéaire, on a
$$\lambda_x \alpha y = \lambda_x x = f(x) = f(\alpha y) = \alpha f(y) = \alpha \lambda_y y.$$
Ainsi $\alpha(\lambda_x - \lambda_y)x = 0$ et donc $\lambda_x = \lambda_y$.
3) Concluons. Choisissons $x \neq 0$ quelconque et notons $\lambda = \lambda_x$. Soit $y \in E$.
   - Si (x, y) est libre, alors $f(y) = \lambda_y y = \lambda_x y = \lambda y$.
   - Si (x, y) est liée et $y \neq 0$, alors $f(y) = \lambda_y y = \lambda_x y = \lambda y$.
   - Si $y = 0$, alors $f(y) = 0 = \lambda y$.

   Ainsi $f(y) = \lambda y$. Nous en déduisons que f est une homothétie de rapport λ.

Exercice 18. Soient E, E', F et F' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient φ un isomorphisme de E sur E' et ψ un isomorphisme de F sur F'. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E', F') \\ f & \longmapsto & \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}$ est bien définie et est un isomorphisme.

Correction : **A VENIR**

Exercice 19. Pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on définit l'application

$$T(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt & \text{si} \quad x > 0, \\ f(0) & \text{si} \quad x = 0. \end{array} \right. \end{array},$$

puis l'application $T : \begin{array}{ccc} C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & T(f) \end{array}$.

1) Montrer que $T(f) \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2) Montrer que T est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
3) Montrer que T est injective.
4) Soit $g \in \mathrm{Im}(T)$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-ce que T est surjective ?
5) Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.

Correction : Les questions 1 à 4 ont été traitée en cours. Occupons-nous de la question 5.

Si $g \in \mathrm{Im}(T)$, alors il existe f continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(0) = g(0)$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $xg(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Cette égalité évidemment reste vraie pour $x = 0$. Nous en déduisons que la fonction $x \longmapsto xg(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que f est sa dérivée. Plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = xg'(x) + g(x).$$

On a déjà montré que g est continue sur $\mathbb{R}$ et que $g(0) = f(0)$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^+} xg'(x) = f(0) - g(0) = 0$. Nous en déduisons que

$$\mathrm{Im}(T) \subset \mathcal{A} = \left\{ g \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \,\middle|\, x \mapsto xg(x) \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \right\}.$$

Réciproquement, donnons-nous g continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $x \longmapsto xg(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Notons f la dérivée de $x \longmapsto xg(x)$ de telle sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = T(f)(x).$$

Par définition, on a aussi

$$Tf(0) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{xg(x) - 0g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0),$$

puisque g est continue en 0. Nous en déduisons que $g = T(f) \in \mathrm{Im}(T)$. Finalement $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{A}$.

III Polynômes d'endomorphisme

Exercice 20. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que le polynôme $f^2 = 5\,\mathrm{Id}_E - 4f$.

1) Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} en fonction de f.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2$ tel que $f^n = a_n f + b_n\,\mathrm{Id}_E$.
3) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n.
   On pourra montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Correction : **A VENIR**

IV Projection vectorielle et projecteurs

Exercice 22. Reprendre les exercices 1, 2 et 4 en explicitant les projections sur F (resp. sur G) parallèlement à G (resp. F).

Correction :

- **Exercice 1.**
  — La projection sur E parallèlement à F est

$$p : (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x - y - z}{2}, \frac{y - x - z}{2}, z \right).$$

— La projection sur F parallèlement à E est

$$q : (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x+y+z}{2}, \frac{x+y+z}{2}, 0\right).$$

- **Exercice 2.**

— La projection sur G parallèlement à F est

$$p : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \left(u_n - \lim_{k\to+\infty} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

— La projection sur F parallèlement à G est

$$q : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \left(\lim_{k\to+\infty} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

- **Exercice 3.**

— La projection sur F parallèlement à $G_- \oplus G_+$ est

$$p_F : \varphi \longmapsto (x \longmapsto \varphi(0)).$$

— La projection sur G_- parallèlement à $F \oplus G_+$ est

$$p_{G_-} : \varphi \longmapsto \left(x \longmapsto \begin{cases} \varphi(x) - \varphi(0) & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}\right).$$

— La projection sur G_+ parallèlement à $F \oplus G_-$ est

$$p_{G_+} : \varphi \longmapsto \left(x \longmapsto \begin{cases} \varphi(x) - \varphi(0) & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}\right).$$

Exercice 24. Soit $p : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x+z, y+z, 0) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer des sous-espaces vectoriels F et G tels que p est la projection sur F parallèlement à G (on en donnera des bases).

Correction : Remarquons que $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ (je vous laisse détailler ce point... c'est ultra classique et facile). Ensuite, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$p \circ p(x, y, z) = p(p(x, y, z)) = \big((x+z) + 0, (y+z) + 0, 0\big) = p(x, y, z).$$

Ainsi $p \circ p = p$ et donc p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

Il s'ensuit que p est la projection sur $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - p)$ parallèlement $G = \mathrm{Ker}(p)$.

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F \quad &\iff \quad (x, y, z) - p(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \quad \begin{cases} x - (x+z) &= 0 \\ y - (y+z) &= 0 \\ z - 0 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \quad z = 0 \\ &\iff \quad (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \end{aligned}$$

Ainsi $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et il est immédiat que $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ est libre.

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in G \quad &\iff \quad p(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \quad \begin{cases} x + z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \quad x = y = -z \\ &\iff \quad (x, y, z) = z(-1, -1, 1) \end{aligned}$$

Ainsi $G = \mathrm{Vect}((-1, -1, 1))$.

Exercice 27 (symétries et involutions). Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soient F un s.e.v de E et G un supplémentaire de F sans E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple de vecteurs $(u_x, v_x) \in F \times G$ tel que $x = u_x + v_x$. L'application $s : x \in E \longmapsto u_x - v_x$ est appelée symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G.

1) a) Montrer que $s \in \mathscr{L}(E)$.
   b) Que dire de l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$?
   c) Montrer que s est un automorphisme de E et que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
   d) Montrer que $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
2) Soit u un automorphisme de E tel que $u^{-1} = u$ (on parle d'involution de E).
   a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.
   b) Montrer que u est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.

Correction :

1) a) Pour tout $(x, y) \in E^2$, il existe $(u_x, u_y, v_x, v_y) \in F^2 \times G^2$ uniquement déterminés tels que $x = u_x + v_x$ et $y = u_y + v_y$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, nous avons $\lambda x + y = (\lambda u_x + u_y) + (\lambda v_x + v_y)$ avec $(\lambda u_x + u_y) \in F$ et $(\lambda v_x + v_y) \in G$. Par conséquent $s(\lambda x + y) = \lambda u_x + u_y - (\lambda v_x + v_y) = \lambda(u_x - v_x) + (u_y - v_y) = \lambda s(x) + s(y)$. Ainsi s est un endomorphisme de E.
   b) Soit $x \in E$. On a $p(x) = \dfrac{1}{2}(s(x) + x) = \dfrac{1}{2}(u_x - v_x + u_x + v_x) = u_x$. Ainsi p est la projection sur F parallèlement à G.
   c) Soit $x \in E$. On a $s \circ s(x) = s(u_x - v_x) = u_x - (-v_x) = u_x + v_x = x$. Ainsi $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et donc s est un automorphisme dont la réciproque est s.
   d)
   - Si $x \in F$ alors $u = u_x$ et donc $s(x) = s(u_x) = u_x = x$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$. Réciproquement, si $s(x) = x$ alors $u_x + v_x = u_x - v_x$ donc $v_x = 0$ et donc $x = u_x \in F$.
   - Si $x \in G$ alors $u = v_x$ et donc $s(x) = s(v_x) = -v_x = -x$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Réciproquement, si $s(x) = -x$ alors $u_x + v_x = -u_x + v_x$ donc $u_x = 0$ et donc $x = v_x \in G$.
2) a) Pour tout $x \in E$, $x = y + z$ avec $y = \frac{1}{2}(x + s(x))$, $z = \frac{1}{2}(s - s(x))$ et

$$s(y) = \frac{1}{2}\left(s(x) + s \circ s(x)\right) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = y, \qquad s(z) = \frac{1}{2}\left(s(x) - s \circ s(x)\right) = \frac{1}{2}(s(x) - x) = -z.$$

   Ainsi $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. De plus si $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, alors $s(x) = x$ et $s(x) = -x$ donc $x = -x$ et donc $x = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{0\}$. Nous en déduisons que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
   b) Enfin, pour tout $x = y + z \in E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, $s(x) = s(y) + s(z) = y - z$. Nous en déduisons que s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.