Feuille d'exercice n° 23

Compléments sur les espaces vectoriels

I Somme d'espaces vectoriels et supplémentaire

Exercice 1. Montrer que les sous-espaces vectoriels $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\}$ et $F = \mathrm{Vect}\big((1,1,0)\big)$ sont supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Notons E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles constantes et G l'ensemble des suites convergentes vers 0. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).

1) Donner une base de l'ensemble $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.
2) A-t-on $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
3) Déterminer un supplémentaire de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4. Notons $F = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ est constante}\}$, $G_- = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ est nulle sur } [0,+\infty[\}$ et $G_+ = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ est nulle sur }]-\infty,0]\}$. Montrer que F, G_- et G_+ sont des s.e.v de $C^0(\mathbb{R})$ et que $C^0(\mathbb{R}) = F \oplus G_- \oplus G_+$.

Exercice 5. Soit $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de s.e.v de E. Montrer que la somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe si et seulement si, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $F_k \cap (F_1+\cdots+F_{k-1}) = \{0\}$.

II Applications linéaires, image et noyau

Exercice 6. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires ?

1) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (xy,y,z) \end{array}$

2) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & 2018(x-y+z-t) \end{array}$

3) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-2P'(X) \end{array}$

4) $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$

5) $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2-3A+2\mathrm{I}_n \end{array}$

6) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (0,x+z,z-y,0,0,x+2z) \end{array}$

7) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t,u) & \longmapsto & (1,x+y,z+t,t+u) \end{array}$

8) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & a+b \\ -b & a-b & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

9) $\begin{array}{ccc} C^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 t\,f(t)\,dt \end{array}$

Exercice 7. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $C^\infty(\mathbb{R})$?

$$1)\ f \longmapsto f'-2f''+3f, \qquad 2)\ f \longmapsto \exp\circ f \qquad 3)\ f \longmapsto (\sin\times f)'$$

Exercice 8. Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (y-2z, 2x+y-4z, x+y-3z)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3) A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$? Pouvait-on le prévoir ?

Exercice 9. Notons $F = \big\{(x+y+4z, 2x+4z, 3x+2y+10z) \,\big|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big\}$.

1) Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $F = \mathrm{Im}(f)$. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On que F est définie sous forme paramétrée.
2) Montrer que $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ où e_1 et e_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
3) Écrire F sous la forme $\mathrm{Ker}(g)$ avec $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On dit alors que $g(x) = 0$ est une équation de F.
4) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = \{\lambda u \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
5) L'endomorphisme f est-il surjectif ? Injectif ? Bijectif ?

Exercice 10. Montrer que $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Est-ce que f est un automorphisme ?

Exercice 11. Montrer que $g : P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto XP$ est un endomorphisme. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$. Est-ce que g est un automorphisme ?

Exercice 12. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Montrer que $f : z \in E \longmapsto z + i\overline{z}$ est un endomorphisme. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 13. Soit $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^N$. Est-il injectif ?
2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f^k)$.
3) Montrer que f est surjectif.

Exercice 14. Soient E un espace vectoriel admettant une base (e_1, e_2, e_3). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que

$$f(e_1) = e_1 - e_2, \qquad f(e_1 - e_2) = e_1 + e_2, \qquad \text{et} \qquad f(e_1 - e_2 + e_3) = 5e_1 + 3e_2 - \alpha e_3.$$

Déterminer α afin que f soit injective.

Exercice 15. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Exercice 16. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
2) Montre que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = f\big(\mathrm{Ker}(g \circ f)\big)$.
3) Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
4) Supposons que f et g commutent, i.e. $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f, i.e. $f\big(\mathrm{Ker}(g)\big) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et $f\big(\mathrm{Im}(g)\big) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 17. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$.

Cet exercice est un immense classique. Voici la démarche à suivre : le fait que, pour un $x \in E$ donné quelconque, la famille $(x, f(x))$ est liée signifie qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Le but de cet exercice est donc de montrer que λ_x ne dépend pas de x en fait.

1) Soit (x, y) une famille libre. En s'intéressant à $x + y$, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
2) Soit (x, y) une famille liée avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
3) Conclure.

Exercice 18. Soient E, E', F et F' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient φ un isomorphisme de E sur E' et ψ un isomorphisme de F sur F'. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E',F') \\ f & \longmapsto & \psi\circ f\circ\varphi^{-1} \end{array}$ est bien définie et est un isomorphisme.

Exercice 19. Pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, on définit l'application

$$T(f):\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si} \quad x>0, \\ f(0) & \text{si} \quad x=0. \end{cases} \end{array},$$

puis l'application $T:\ \begin{array}{ccc} C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & T(f) \end{array}$.

1) Montrer que $T(f) \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.
2) Montrer que T est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.
3) Montrer que T est injective.
4) Soit $g \in \mathrm{Im}(T)$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-ce que T est surjective ?
5) Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.

III Polynômes d'endomorphisme

Exercice 20. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que le polynôme $f^2 = 5\,\mathrm{Id}_E - 4f$.

1) Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} en fonction de f.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2$ tel que $f^n = a_n f + b_n \,\mathrm{Id}_E$.
3) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n.
   On pourra montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $d : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto P'$.

1) Montrer que d est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer son noyau et son image.
2) Calculer $(\mathrm{Id}_E - d)\circ\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} d^k\right)$.
3) En déduire que $\mathrm{Id}_E - d$ est un automorphisme de E.
4) Déterminer l'antécédent de $\dfrac{X^n}{n!}$ par $\mathrm{Id}_E - d$.

IV Projection vectorielle et projecteurs

Exercice 22. Reprendre les exercices 1, 2 et 4 en explicitant les projections sur F (resp. sur G) parallèlement à G (resp. F).

Exercice 23. Soit $p : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (2y-3x, 4y-6x) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer des sous-espaces vectoriels F et G tels que p est la projection sur F parallèlement à G (on en donnera des bases).

Exercice 24. Soit $p : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x+z, y+z, 0) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer des sous-espaces vectoriels F et G tels que p est la projection sur F parallèlement à G (on en donnera des bases).

Exercice 25. Soit B un polynôme non nul à coefficients réels.

1) Montrer que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme associe le reste de sa division euclidienne par B est un projecteur.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 26. Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $p \circ q = q \circ p$.

1) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E.
2) Montrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 27 (symétries et involutions). Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soient F un s.e.v de E et G un supplémentaire de F sans E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple de vecteurs $(u_x, v_x) \in F \times G$ tel que $x = u_x + v_x$. L'application $s : x \in E \longmapsto u_x - v_x$ est appelée symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G.

1) a) Montrer que $s \in \mathscr{L}(E)$.
   b) Que dire de l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$?
   c) Montrer que s est un automorphisme de E et que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
   d) Montrer que $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
2) Soit u un automorphisme de E tel que $u^{-1} = u$ (on parle d'involution de E).
   a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.
   b) Montrer que u est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.