Correction de quelques exercices de la feuille de TD 22

I Lois discrètes

Exercice 5. On sait qu'une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes.

1) Si on considère une population de n personnes, on peut modéliser le nombre de personne mesurant plus de 1m90 par une loi de Poisson. Quel paramètre doit-on considérer pour cette loi de Poisson ?
2) Calculer la probabilité que, dans une population de 100 personnes, il y ait au moins une personne mesurant plus de 1m90.
3) Calculer la probabilité que, dans une population de 300 personnes, il y ait au moins deux personne mesurant plus de 1m90.

Correction :

1) Si on considère une population de n personnes, il y a en moyenne $\dfrac{n}{80}$ personnes mesurant plus d'1m90. On modélise donc le nombre de personne mesurant plus de 1m90 par une variable aléatoire X_n de loi de Poisson de paramètre $\dfrac{n}{80}$.
2) Si $n=100$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\dfrac{5}{4}\right)$. La probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1m90 est
$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1-\mathbb{P}(X<1) = 1-\mathbb{P}(X=0) = 1-e^{-5/4} \approx 0,713.$$
3) Si $n=300$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\dfrac{15}{4}\right)$. La probabilité qu'il y ait au moins deux personne mesurant plus de 1m90 est
$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1-\mathbb{P}(X<2) = 1-\mathbb{P}(X=0)-\mathbb{P}(X=1) = 1-e^{-15/4}-e^{-15/4}\frac{15}{4} \approx 0,888.$$

II Espérance, moments, variance

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale négative de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ (cf. exercice 9). Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

La formule de la question 3 sera d'une grande aide. Pour la variance, on pourra calculer d'abord $\mathbb{E}(X(X+1))$.

Correction :

- Commençons par montrer que X admet un moment d'ordre 2. Pour tout $k \geqslant n$, on a
$$\begin{aligned} k^2\mathbb{P}(X=k) = k^2\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n} &= k^2\,\frac{(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}p^n(1-p)^{k-n} \\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} k^2\,\frac{k^{n-1}}{(n-1)!}p^n(1-p)^{k-n} \\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{p^n}{(n-1)!(1-p)^n}\,k^{n+1}\,(1-p)^k \end{aligned}$$

  On remarque que
$$k^4\mathbb{P}(X=k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{p^n}{(n-1)!(1-p)^n}\,k^{n+3}\,(1-p)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par croissances comparées (du type $k^\alpha a^k$ avec $\alpha = n+3$ et $a = 1-p$). Ainsi $k^2\mathbb{P}(X=k) = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Puisque $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ converge, le théorème de comparaison des séries à termes positifs, entraîne que $\sum_{k\geqslant 1} k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge. Ainsi X admet un moment d'ordre 2.

- On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=n}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} k\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} n\binom{k}{n}p^n(1-p)^{k-n}.$$

On veut se ramener à la formule de la question 3 de l'exercice 9. On pose $x = 1-p$ et on fait le changement d'indice $k = j-1$:

$$\mathbb{E}(X) = np^n\sum_{j=n+1}^{+\infty}\binom{j-1}{n}x^{j-1-n} = np^n \underbrace{\sum_{j=n+1}^{+\infty}\binom{j-1}{(n+1)-1}x^{j-(n+1)}}_{=\frac{1}{(1-x)^{n+1}}} = \frac{np^n}{(1-(1-p))^{n+1}} = \frac{n}{p}.$$

- On a, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X+1)) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k+1)\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=n}^{+\infty} k(k+1)\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}\\ &= \sum_{k=n}^{+\infty}(k+1)n\binom{k}{n}p^n(1-p)^{k-n}\\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} n(n+1)\binom{k+1}{n+1}p^n(1-p)^{k-n}\end{aligned}$$

On veut se ramener à la formule de la question 3 de l'exercice 9. On pose $x = 1-p$ et on fait le changement d'indice $k = j-2$:

$$\mathbb{E}(X(X+1)) = n(n+1)p^n\sum_{j=n+2}^{+\infty}\binom{j-1}{n+1}x^{j-2-n} = n(n+1)p^n\underbrace{\sum_{j=n+2}^{+\infty}\binom{j-1}{(n+2)-1}x^{j-(n+2)}}_{=\frac{1}{(1-x)^{n+2}}}$$

donc

$$\mathbb{E}(X(X+1)) = \frac{np^n}{(1-(1-p))^{n+2}} = \frac{n(n+1)}{p^2}$$

et donc $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X) = \frac{n(n+1)}{p^2} - \frac{n}{p}$. Enfin la formule de Huygens-Koenig entraîne que

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X^2) = \frac{n(n+1)}{p^2} - \frac{n}{p} - \frac{n^2}{p^2} = \frac{1}{p^2}(n^2+n-np-n^2) = \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda+1) \leqslant \lambda$ et $\mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda}$. Est-ce intéressant ?

Correction : La variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

- On a $[X \geqslant \lambda+1] = [X \geqslant \mathbb{E}(X)+1] = [X - \mathbb{E}(X) \geqslant 1] \subset [|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant 1]$ donc

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda+1) \leqslant \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant 1) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{1^2} = \lambda,$$

d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Cette inégalité n'a aucun intérêt si $\lambda \geqslant 1$.

- On a $\left[X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right] = \left[X - \mathbb{E}(X) \leqslant -\frac{\lambda}{2}\right] \subset \left[|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \frac{\lambda}{2}\right]$ donc
$$\mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{(\lambda/2)^2} = \frac{4}{\lambda},$$
d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Cette inégalité n'a aucun intérêt si $\lambda \leqslant 4$.

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathbb{P}(|X| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|^r)}{x^r}.$$

Correction : Pour tout $x > 0$, on a $[|X| \geqslant x] \leqslant [|X|^r \geqslant x^r]$ par croissance de $t \longmapsto t^r$. Ainsi $\mathbb{P}(|X| \geqslant x) \leqslant \mathbb{P}(|X|^r \geqslant x^r)$. La formule de transfert nous assure que $|X|^r$ admet une espérance et, comme il s'agit d'une v.a.r.d à valeurs positives, l'inégalité de Markov entraîne que
$$\mathbb{P}(|X| \geqslant x) \leqslant \mathbb{P}(|X|^r \geqslant x^r) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|^r)}{x^r}.$$

Exercice 15. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance. L'objectif de cet exercice est de montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X = j) + (n+1)\mathbb{P}(X > n)$.
2) Justifier que $(n+1)\mathbb{P}(X > n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.
3) Conclure.

Correction :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n} (1 - \mathbb{P}(X \leqslant k)) = n + 1 - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X \leqslant k) = n + 1 - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j).$$
En appliquant le théorème de Fubini, nous obtenons que :
$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \mathbb{P}(X = j).$$
Ainsi
$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = n + 1 - \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \mathbb{P}(X = j) = n + 1 - \sum_{j=0}^{n} (n - j + 1)\mathbb{P}(X = j)$$
et donc
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) &= n + 1 - (n+1) \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X = j) + \sum_{j=0}^{n} j\mathbb{P}(X = j) \\ &= n + 1 - (n+1)\mathbb{P}(X \leqslant n) + \sum_{j=0}^{n} j\mathbb{P}(X = j) \\ &= (n+1)\mathbb{P}(X > n) + \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X = j)\end{aligned}$$

2) Si $k \geqslant n+1$, alors $k\mathbb{P}(X=k) \geqslant (n+1)\mathbb{P}(X=k)$ si bien que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)\mathbb{P}(X=k) = (n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = (n+1)\mathbb{P}(X>n).$$

3) Puisque X admet une espérance, on a $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (on reconnait le reste d'une série convergente). Par encadrement, nous en déduisons que $(n+1)\mathbb{P}(X>n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Finalement

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X>k) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X=j) + (n+1)\mathbb{P}(X>n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \mathbb{E}(X)$$

et donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X>k)$ converge et sa somme vaut $\mathbb{E}(X)$.

III Variables aléatoires indépendantes

Exercice 18. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendants ayant la même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On note F la fonction de répartition de X_1. Posons $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $T_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Exprimer les fonctions de répartition de M_n et T_n en fonction de F et de n.
2) Exprimer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{E}(T_n)$ (si elles existent) en fonction de F.
   On s'aidera d'un exercice de cette feuille.
3) Déterminer la loi de T_n lorsque X_1 suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Correction :

1) Soit $t \in \mathbb{N}$.
   - L'idée est de remarquer que $M_n \leqslant t$ si et seulement si $X_i \leqslant t$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Ainsi

   $$F_{M_n}(t) = \mathbb{P}(M_n \leqslant t) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t]\right).$$

   Puisque $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendants, on obtient :

   $$F_{M_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant t) = \prod_{i=1}^{n} F(t) = \big(F(t)\big)^n.$$

   L'avant dernière égalité découle du fait que $X_1, \ldots, X_n$ ont même loi donc même fonction de répartition.
   - L'idée est de remarquer que $T_n \geqslant t$ si et seulement si $X_i \geqslant t$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Ainsi

   $$F_{T_n}(t) = 1 - \mathbb{P}(T_n > t) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \geqslant t]\right).$$

   Puisque $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendants, on obtient :

   $$F_{T_n}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geqslant t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \big(1 - F(t)\big) = 1 - \big(1 - F(t)\big)^n.$$

   L'avant dernière égalité découle du fait que $X_1, \ldots, X_n$ ont même loi donc même fonction de répartition.
2) Si $\mathbb{E}(M_n)$ existe, alors l'exercice 15 de cette feuille entraîne que

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(M_n > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_{M_n}(k)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - \big(F(k)\big)^n\Big)$$

et, si $\mathbb{E}(T_n)$ existe, alors

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_{T_n}(k)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F(k)\big)^n\Big)$$

3) Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $F(t) = 1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (et 0 sinon). Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad F_{T_n}(t) = 1 - \big(1 - F(t)\big)^n = \begin{cases} 1 - (1-p)^{n\lfloor t \rfloor} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $T_n \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$ avec $1 - \alpha = (1-p)^n$, c'est-à-dire $\alpha = 1 - (1-p)^n$.