Feuille d'exercice n° 22

Variables aléatoires réelles discrètes

I Lois discrètes

Exercice 1. On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir deux Piles ou deux Faces consécutives. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers nécessaires. Donner la loi de X.

Exercice 2. Parmi les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ (lorsque c'est possible) pour que $(\lambda p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définisse la loi d'une variable aléatoire.

1) $p_n = n\alpha^n$, 2) $p_n = \ln\left(\dfrac{n^\alpha+1}{n^\alpha+2}\right)$, 3) $p_n = 1-\cos\left(\dfrac{1}{(n+1)^{3/2}}\right)$,

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n+1) = \dfrac{4}{n}\mathbb{P}(X = n)$. Déterminer la loi de X. Donnez $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ sans calculs.

Exercice 4. Une analyse en laboratoire est délicate : elle réussit 7 fois sur 10. Cette analyse coûte 100 euros.

1) Soit $k \geqslant 1$. Calculer la probabilité qu'il faille recommencer k fois cette analyse pour la réussir au moins une fois.
2) Quel budget doit-on prévoir si on veut avoir au moins 99% de chances de réussir cette analyse une fois ?

Exercice 5. On sait qu'une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes.

1) Si on considère une population de n personnes, on peut modéliser le nombre de personne mesurant plus de 1m90 par une loi de Poisson. Quel paramètre doit-on considérer pour cette loi de Poisson ?
2) Calculer la probabilité que, dans une population de 100 personnes, il y ait au moins une personne mesurant plus de 1m90.
3) Calculer la probabilité que, dans une population de 300 personnes, il y ait au moins deux personne mesurant plus de 1m90.

Exercice 6. Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire réelle discrète X telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X = n) = \frac{c^n}{(1+c)^{n+1}},$$

où $c \in \mathbb{R}_+^*$ est le prix de la campagne publicitaire de l'année précédente.

1) Montrer que la loi de X est bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
2) Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.
3) Le commerçant possède un stock de $s \in \mathbb{N}^*$ unités. Déterminer la probabilité de rupture de stock.
4) Combien doit-il prévoir de stock afin que cette probabilité soit inférieure à 1% ?

Exercice 7. Soit N une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $[N = n]$, X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$ (*si* $n = 0$, $\mathcal{B}(n,p)$ *désigne la loi constante égale à* 0). Déterminer la loi de X.

Exercice 8. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(N = k) = 2^{-k}$. On lance N fois un dé équilibré à six faces. On note S la variable aléatoire comptant la somme des points obtenus. Quelle est la probabilité que

1) $N = 2$ sachant que $S = 4$?
2) $S = 4$ sachant que N est pair ?

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une épreuve de Bernoulli. Soit $p \in]0, 1[$ la probabilité d'obtenir un succès. On répète de façon indépendante cette expérience de Bernoulli et on note S_n la variable aléatoire égale au nombre d'expériences réalisées pour obtenir le n-ième succès.

1) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant n$. Exprimer l'événement $[S_n = k]$ au moyen des événements A_k et $B_{n,k}$ définis par
   — A_k : « la $k^{\text{ième}}$ expérience est un succès »,
   — $B_{n,k}$: « au cours des $k - 1$ premières expériences, on a obtenu $n - 1$ succès ».
2) Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(B_{n,k})$ et en déduire la loi de S_n :
$$\forall k \geqslant n \qquad \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$
   On dit que S_n suit une loi binomiale négative (ou de Pascal) de paramètres n et p. Pour $n = 1$, il s'agit de la loi géométrique de paramètre p.
3) En déduire que
$$\forall x \in]0, 1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

II Espérance, moments, variance

Exercice 10. Un sauteur tente de franchir des barres successives numérotées. Il n'essaye de franchir la barre de hauteur $k \in \mathbb{N}^*$ que s'il a réussi à passer celle de hauteur $k - 1$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de sauter la $n^{\text{ième}}$ barre sachant qu'il a sauté les $n - 1$ premières est $\frac{1}{n}$. On suppose qu'il saute la première barre avec probabilité 1. Notons X la variable aléatoire égale au numéro de la dernière barre franchie correctement.

1) Calculer $\mathbb{P}(X > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que X est presque sûrement finie.
2) Détermine la loi de X.
3) Calculer l'espérance et la variance de X (si elles existent).

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale négative de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ (cf. exercice 9). Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
La formule de la question 3 sera d'une grande aide. Pour la variance, on pourra calculer d'abord $\mathbb{E}(X(X + 1))$.

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire de loi de Poission de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda$ et $\mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda}$. Est-ce intéressant ?

Exercice 13. Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

1) Soit $z \in \mathbb{R}$. Montrer que $Y = z^X$ est une variable aléatoire qui admet une espérance et la calculer.
2) Montrer que $Y = \frac{1}{1 + X}$ est une variable aléatoire qui admet une espérance et la calculer.

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathbb{P}(|X| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|^r)}{x^r}.$$

Exercice 15. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance. L'objectif de cet exercice est de montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X = j) + (n+1)\mathbb{P}(X > n)$.
2) Justifier que $(n+1)\mathbb{P}(X > n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.
3) Conclure.

Exercice 16. Soient $r_0 \in \mathbb{N}^*$ et $d \in]1, +\infty[$. Un joueur joue à Pile ou Face contre la banque du casino avec une pièce dont la probabilité de tomber sur Pile est $p \in]0, 1[$. On suppose qu'il est très fortuné. Il mise initialement r_0 euros. Tant qu'il obtient Face, il perd ce qu'il a misé et remise d fois sa mise précédente. Dès qu'il obtient Pile, il gagne d fois sa dernière mise et quitte le casino.

1) Quelle est la loi du nombre X de lancers ? Justifier que le jeu s'arrête presque sûrement.
2) Soit G la variable correspondant au gain du joueur à l'issue de la partir (comptant bien sûr la mise gagnante mais aussi toutes les mises qu'il a perdues). Exprimer G en fonction de X.
3) Calculer l'espérance de G (lorsqu'elle existe).
4) Pour quelles valeurs de d a-t-on $\mathbb{E}(G)$? Ce jeu est-il favorable au joueur ?

III Variables aléatoires indépendantes

La notion de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes n'est pas au programme de première année d'ECS mais elle est au programme de deuxième année. Elle est cependant tout à fait accessible dès à présent avec les résultats et techniques que nous avons à notre disposition. En voici la définition :

Définition. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes. On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes si

$$\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant t_i).$$

Exercice 17. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendants de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda + \mu$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

Exercice 18. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendants ayant la même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On note F la fonction de répartition de X_1. Posons $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $T_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Exprimer les fonctions de répartition de M_n et T_n en fonction de F et de n.
2) Exprimer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{E}(T_n)$ (si elles existent) en fonction de F.
   On s'aidera d'un exercice de cette feuille.
3) Déterminer la loi de T_n lorsque X_1 suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.