Correction de quelques exercices de la feuille de TD 21

I Tribus et événements

Exercice 3. Soit $\mathcal{A}$ une tribu de $\mathbb{R}$ contenant tous les segments. Montrer qu'elle contient tous les intervalles.

Correction : Il suffit de remarquer (mais pour être complet il faudrait montrer chacune des égalités ensemblistes ci-dessous par double inclusion) que, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a\leqslant b$,

- $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}\in\mathcal{A}$,
- $]-\infty,a]=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,a]\in\mathcal{A}$,
- $[a,+\infty[=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a,n]\in\mathcal{A}$,
- $]-\infty,a[=\overline{[a,+\infty[}\in\mathcal{A}$,
- $]a,+\infty[=\overline{]-\infty,a]}\in\mathcal{A}$,
- $[a,b]\in\mathcal{A}$,
- $]a,b[=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a+1/n,b-1/n]\in\mathcal{A}$,
- $]a,b]=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a+1/n,b]\in\mathcal{A}$,
- $[a,b[=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a,b-1/n]\in\mathcal{A}$.

II Calcul de probabilités

Exercice 9. On lance deux dés équilibrés. Si la somme des dés vaut 5 ou 7, alors on arrête. Sinon on recommence cette expérience jusqu'à ce qu'une somme valant 5 ou 7 apparaisse.

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons E_n l'événement « on obtient 5 au $n^{\text{ième}}$ lancer et on n'avait obtenu ni 5 ni 7 précédemment » . Calculer $\mathbb{P}(E_n)$.
2) Quelle est la probabilité qu'on arrête le jeu en obtenant une somme de 5 ?
3) Quelle est la probabilité qu'on arrête le jeu en obtenant une somme de 7 ?
4) Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

Correction : A chaque lancer de deux dés, on obtient une somme égale

- à 5 si les dés tombent sur $(1,4)$ ou $(2,3)$ ou $(3,2)$ ou $(4,1)$
- à 7 si les dés tombent sur $(1,6)$ ou $(2,5)$ ou $(3,4)$ ou $(4,3)$ ou $(5,2)$ ou $(1,6)$.

Ainsi la probabilité d'obtenir une somme égale à 5 (resp. à 7) est égale à $\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$ (resp. $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$) et donc la probabilité d'obtenir une somme égale à 5 ou à 7 est égale à $\dfrac{5}{18}$.

On suppose que chaque double lancer est indépendant et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note L_n^5 l'événement « obtenir 5 au $n^{\text{ième}}$ lancer » et L_n^7 l'événement « obtenir 5 au $n^{\text{ième}}$ lancer »

1) On a $\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(L_1^5) = \dfrac{1}{9}$. Pour tout $n \geqslant 2$, $E_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \left(\overline{L_k^5} \cap \overline{L_k^7}\right)\right) \cap G_n$ donc, par indépendance des lancers,
$$\mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(\overline{L_k^5} \cap \overline{L_k^7}\right) \times \mathbb{P}(L_n^5) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{13}{18} \times \frac{1}{9} = \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \frac{1}{9}.$$

2) Les événements E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont deux à deux incompatibles si bien que la probabilité qu'on arrête le jeu en obtenant une somme de 5 est
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{j} = \frac{1}{9} \frac{1}{1 - 13/18} = \frac{2}{5}.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La probabilité de F_n : « on obtient 7 au $n^{\text{ième}}$ lancer et on n'avait obtenu ni 5 ni 7 précédemment » est
$$\mathbb{P}(F_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(\overline{L_k^5} \cap \overline{L_k^7}\right) \times \mathbb{P}(L_n^7) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{13}{18} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \frac{1}{6}.$$
Les événements F_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont deux à deux incompatibles si bien que la probabilité qu'on arrête le jeu en obtenant une somme de 7 est
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(F_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{j} = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - 13/18} = \frac{3}{5}.$$

4) La probabilité que le jeu s'arrête est
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n\right) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$$
Ainsi la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est nulle.

III Probabilités conditionnelles et indépendance

IV Variables aléatoires réelles

Exercice 14. On rappelle que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une application continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Correction : Puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a <\leqslant b \leqslant +\infty$.

- Si $a \in \mathbb{R}$ et si $x \leqslant a$, alors $[f \leqslant x] = \{\omega \in \mathbb{R} \,|\, f(\omega) \leqslant x\} = \varnothing \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- Si $b \in \mathbb{R}$ et si $x \geqslant b$, alors $[f \leqslant x] = \{\omega \in \mathbb{R} \,|\, f(\omega) \leqslant x\} = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- Si $x \in]a, b[$, alors $[f \leqslant x] = \{\omega \in \mathbb{R} \,|\, f(\omega) \leqslant x\} = \{\omega \in \mathbb{R} \,|\, \omega \leqslant f^{-1}(x)\} =]-\infty, f^{-1}(x)] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ainsi f est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$