Feuille d'exercice n° 21

Probabilités sur un univers quelconque

I Tribus et événements

Exercice 1. Énumérer les tribus possibles des ensembles $\{a\}$, $\{a,b\}$ et $\{a,b,c\}$.

Exercice 2. Soit $\Omega = [\![1,6]\!]$. Déterminer la tribu de Ω engendrée par $\{\{5,6\},\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{A}$ une tribu de $\mathbb{R}$ contenant tous les segments. Montrer qu'elle contient tous les intervalles.

Exercice 4. On lance une pièce de monnaie une infinité de fois et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note T_n : « obtenir Pile au $n^{\text{ième}}$ lancer ». Décrire avec des phrases les événements $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geqslant n} T_p$ et $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} T_p$.

II Calcul de probabilités

Exercice 5. Parmi les applications $\mathbb{P}$ listées ci-dessous, déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ (lorsque c'est possible) pour que $\alpha\,\mathbb{P}$ soit une probabilité sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$:

1) $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$,
2) $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \dfrac{1}{(n+1)^2}$,
3) $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \dfrac{1}{\pi^n}$,
4) $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto 1-\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$,
5) $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \dfrac{5^n}{n!}$,
6) $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Exercice 6. Une urne contient deux boules marrons et une boule verte. On effectue une suite de tirages d'une boule dans cette urne jusqu'à ce qu'on tire la boule verte. Montrer que l'on effectuera presque-sûrement un nombre fini de tirages.

Exercice 7. Dans une population, on suppose que la probabilité qu'une famille ait n enfants est $p_n = \alpha\dfrac{2^n}{n!}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il est équiprobable qu'un enfant soit une fille ou un garçon

1) Déterminer la valeur de α.
2) Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.
3) Quelle est la probabilité pour famille ayant exactement une fille comporte deux enfants ?
4) Quelle est la probabilité pour qu'une famille ait exactement deux filles sachant qu'elle a exactement deux garçons ?

Exercice 8. Eric propose à Layla un pari au jeu de pile ou face. Au premier tour du pari, Layla lance une pièce de monnaie bien équilibrée. Si la pièce tombe sur Pile, Layla gagne le pari. Sinon elle continue avec la règle suivante : si le jeu n'est toujours pas terminé au $n^{\text{ième}}$ tour, avec $n \in \mathbb{N}^*$, elle lance n pièces de monnaie équilibrées et l'emporte si toutes les pièces tombent sur Pile. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'événement « Layla n'a toujours pas remporté le pari d'Eric à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tour ».

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$.
2) Montrer que la suite $\big(\ln \mathbb{P}(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3) Conclure qu'Eric a une probabilité non nulle de gagner.

Exercice 9. On lance deux dés équilibrés. Si la somme des dés vaut 5 ou 7, alors on arrête. Sinon on recommence cette expérience jusqu'à ce qu'une somme valant 5 ou 7 apparaisse.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons E_n l'événement « on obtient 5 au $n^{\text{ième}}$ lancer et on n'avait obtenu ni 5 ni 7 précédemment » . Calculer $\mathbb{P}(E_n)$.
2) Quelle est la probabilité qu'on arrête le jeu en obtenant une somme de 5 ?
3) Quelle est la probabilité qu'on arrête le jeu en obtenant une somme de 7 ?
4) Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice 10. Une puce parcourt un triangle équilatéral ABC de la façon suivante : si elle est au sommet A ou au sommet B, elle saute vers un des trois sommets de façon équiprobable (elle peut sauter sur place). Si elle saute sur C, elle se dirige toujours vers A. Initialement elle se trouve au sommet A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives que la puce soit au sommet A, B, C à l'issue du $n^{\text{ième}}$ saut.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $X_n = {}^t\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
2) Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}MP$.
3) En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Soient $p \in]0,1[$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, N]\!]$. Un joueur possède k euros et désire en avoir N. Pour cela il effectue une série de paris mutuellement indépendants. A chaque pari il gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $q = 1 - p$. Il continue de jouer jusqu'à ce qu'il ait accumulé N euros (incluant la mise de départ) ou jusqu'à ce qu'il soit ruiné. On note r_k la probabilité que le joueur finisse le jeu ruiné.

1) Calculer r_0 et r_N. Montrer ensuite que $r_k = pr_{k+1} + qr_{k-1}$ lorsque $k \notin \{0, n\}$.
   On pourra introduire l'événement G : « le joueur gagne son premier pari ».
2) Montrer que, si $p \neq 1/2$, alors $r_k = \dfrac{(\frac{q}{p})^k - (\frac{q}{p})^N}{1 - (\frac{q}{p})^N}$.
3) Traiter le cas où $p = 1/2$.
4) Comment évolue cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$. Commenter.

Exercice 12 (paradoxe du singe savant). Le paradoxe du singe savant est un théorème selon lequel un singe (immortel) qui tape indéfiniment et au hasard sur le clavier d'une machine à écrire pourra presque sûrement écrire *Hamlet* de Shakespeare (ou tout autre texte d'une longueur finie d'ailleurs).

Plus généralement supposons que la machine à écrire dispose de $\ell \in \mathbb{N}^*$ caractères et que le texte que le singe doit taper contienne N caractères. Il est raisonnable de supposer que le singe tape chaque caractère indépendamment des autres et totalement au hasard.

1) Quelle est la probabilité que, à l'issue des N premiers caractères tapés, le singe n'ait pas écrit le texte ?
2) On recommence n fois l'expérience consistant à taper un bloc de $N \in \mathbb{N}^*$ caractères. Quelle est la probabilité P_n que le signe n'ai tapé le texte dans aucun des n blocs ?
3) Conclure et commenter.

III Variables aléatoires réelles

Exercice 13. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que si $X = Y$ presque sûrement (i.e. $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$), alors X et Y ont la même loi.

Exercice 14. On rappelle que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une application continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.