# Correction de quelques exercices de la feuille de TD 20

## I Étude de la nature de séries

**Exercice 1.** Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

$$1)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2(-1)^n}{n!}, \qquad 2)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)7^n}{(n+1)!}, \qquad 3)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{3^n}, \qquad 4)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+n-3}{5^{n-1}}.$$

***Correction :***

1) Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{n^2(-1)^n}{n!} = \big(n(n-1)+n\big)\frac{(-1)^n}{n!} = \frac{(-1)^n}{(n-2)!} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Puisque les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$ convergent (ce sont des séries exponentielles), nous en déduisons que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{n^2(-1)^n}{n!}$ converge et donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2(-1)^n}{n!}$ converge. De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2(-1)^n}{n!} = 0 - 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2(-1)^n}{n!} = -1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

En faisant le changement de variables $j = n-2$ dans la première somme, et $j = n-1$ dans la deuxième, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2(-1)^n}{n!} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = -1 + e^{-1} - \big(e^{-1}-1\big) = 0.$$

2) Traité en cours.

3) Pour tout $n \geqslant 1$,

$$(-1)^{n-1}\frac{n-1}{3^n} = \frac{n}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

Puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$ converge (c'est une série géométrique dérivée de raison $-1/3 \in \left]-1,1\right[$) et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ converge (c'est une série géométrique de raison $-1/3 \in \left]-1,1\right[$), nous en déduisons que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{3^n}$ converge. De plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(1-(-1/3))^2} - \frac{1/3}{1-(-1/3)} = \frac{1}{3}\,\frac{9}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{16}.$$

4) Traité en cours.

**Exercice 3.** Trouver une fraction dont le développement décimal est $12,121212121212121212\ldots$.

***Correction :*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = 12,\underbrace{1212121212\cdots12}_{n \text{ fois}}$. On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} 12\left(\frac{1}{100}\right)^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} 12\left(\frac{1}{100}\right)^k = 12\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^k = 12\,\frac{1}{1-1/100} = \frac{400}{33},$$

car $\left|\frac{1}{100}\right| < 1$. Ainsi $\frac{400}{33}$ est une fraction dont le développement décimal est $12,121212121212121212\ldots$.

**Exercice 4.** Étudier la convergence des séries de terme général

1) $\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)$,
2) $\frac{1}{\sqrt[4]{n^3-1}}$,
3) $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}}$,
4) $\frac{\cos(3^n)}{4n^2-3n+6}$,
5) $\frac{1}{n\cos^2(n)}$,
6) $1-\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^3}}$,
7) $1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$,
8) $n\ln(n)e^{-\sqrt{n}}$,
9) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,
10) $\frac{(-1)^n n!}{n^n}$,
11) $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$,
12) $\ln\left(1-\frac{1}{n+5}\right)$,
13) $\frac{\ln(n)}{n^2}$,
14) $\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
15) $1-\frac{1}{\sqrt[n]{e}}$,
16) $\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$,
17) $\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$,
18) $\sqrt{\tan\left(\frac{1}{2018+n\sqrt{n}}\right)}$

***Correction :*** La plupart ont été traitées en cours.

3) Pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}} \geqslant 0$. On a $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge puisque $\frac{3}{2} > 1$ si bien que $\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}}$ converge.

7) Pour tout $n \geqslant 1$, $1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \geqslant 0$. On a $1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n}$ puisque $\frac{\pi}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n}$ diverge si bien que $\sum_{n\geqslant1}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ converge.

8) Pour tout $n \geqslant 1$, $n\ln(n)e^{-\sqrt{n}} \geqslant 0$. On a

$$n^2\,n\ln(n)e^{-\sqrt{n}} = n^3\ln(n)e^{-\sqrt{n}} = \frac{\ln(n)}{n}\,n^4e^{-\sqrt{n}} = \frac{\ln(n)}{n}\,(\sqrt{n})^8e^{-\sqrt{n}}.$$

Par croissances comparées, on a $\frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(\sqrt{n})^8e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $x^8e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$). Ainsi $n^2\,n\ln(n)e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $n\ln(n)e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^2}$ converge si bien que $\sum_{n\geqslant1} n\ln(n)e^{-\sqrt{n}}$ converge.

10) Pour tout $n \geqslant 4$, $n^2\left|\frac{(-1)^n n!}{n^n}\right| = n^2\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{6}{n}\prod_{k=4}^{n}\frac{k}{n} \leqslant \frac{6}{n}$. Par encadrement, on obtient que $n^2\left|\frac{(-1)^n n!}{n^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $\left|\frac{(-1)^n n!}{n^n}\right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^2}$ converge si bien que $\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^n n!}{n^n}$ converge absolument et donc converge.

12 Pour tout $n \geqslant 1$, $\ln\left(1-\frac{1}{n+5}\right) \leqslant 0$. On a $\ln\left(1-\frac{1}{n+5}\right) \sim -\frac{1}{n+5} \sim \frac{-1}{n}$ puisque $\frac{-1}{n+5} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge si bien que $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1-\frac{1}{n+5}\right)$ diverge.

13) Pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{\ln(n)}{n^2} \geqslant 0$. On a $n^{3/2}\frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge si bien que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n^2}$ converge.

14) Pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0$. On a $\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$ puisque $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge si bien que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

15) Pour tout $n \geqslant 1$, $1-\frac{1}{\sqrt[n]{e}} \geqslant 0$. On a $1-\frac{1}{\sqrt[n]{e}} = 1-e^{-1/n} \sim \frac{1}{n}$ puisque $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge si bien que $\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{e}}\right)$ diverge.

16) Pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} \geqslant 0$. On a

$$\frac{n^2}{(\ln(n))^{\ln(n)}} = \exp\Big(2\ln(n)-\ln(n)\ln(\ln(n))\Big) = \exp\Big(2\ln(n)\big(1-\ln(\ln(n))\big)\Big).$$

Comme $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $2\ln(n)\big(1-\ln(\ln(n))\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et donc $\frac{n^2}{(\ln(n))^{\ln(n)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge si bien que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ converge.

18) Pour tout $n \geqslant 0$, $\sqrt{\tan\left(\frac{1}{2018+n\sqrt{n}}\right)} \geqslant 0$. Puisque $\frac{1}{2018+n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\tan\left(\frac{1}{2018+n\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{2018+n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$. Ainsi $\sqrt{\tan\left(\frac{1}{2018+n\sqrt{n}}\right)} \sim \frac{1}{n^{3/4}}$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/4}}$ diverge si bien que $\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{\tan\left(\frac{1}{2018+n\sqrt{n}}\right)}$ diverge.

**Exercice 6.** Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

*On pourra déterminer* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *tels que, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2}$.

***Correction :*** Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ converge si bien que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.

Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2} = \frac{a(n+1)(n+2)+bn(n+2)+cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b+c)n^2+(3a+2b+c)n+2a}{n(n+1)(n+2)}.$$

Si on choisit $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$ et $c=\frac{1}{2}$ (on trouve ces quantités en résolvant un système par exemple), alors $\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} + \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+2}\frac{1}{j},$$

à l'aide de changement de variables. On a donc

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

**Exercice 7.** Étudier la convergente absolue et la convergence des séries suivantes

$$1)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right), \qquad 2)\ \sum_{n\geqslant 1}\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{3n}\right), \qquad 3)\ \sum_{n\geqslant 2}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}.$$

*Indication : si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite des sommes partielles alors, pour montrer la convergence de ces séries, on pourra essayer de prouver que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Ces séries sont dites alternées. L'étude générale des séries alternées (cf. exercice 13) n'est pas au programme d'ECS mais la méthode d'étude est standard et il faut la connaitre.*

***Correction :***

1) Traitée en cours.
2) Puisque $\displaystyle\frac{(-1)^n\pi}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\displaystyle\left|\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{3n}\right)\right| \sim \left|\frac{(-1)^n\pi}{3n}\right| = \frac{\pi}{3n}$. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge si bien que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left|\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{3n}\right)\right|$ diverge. La série ne converge pas absolument. Montrons qu'elle converge néanmoins.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\dfrac{(-1)^k\pi}{3k}\right)$.

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$S_{2n+2}-S_{2n} = \sin\left(\frac{(-1)^{2n+2}\pi}{3(2n+2)}\right)+\sin\left(\frac{(-1)^{2n+1}\pi}{3(2n+1)}\right) = \sin\left(\frac{1}{3(2n+2)}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3(2n+1)}\right) \leqslant 0,$$
   puisque $\sin$ est croissant sur $[0,\pi/2]$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{3(2n+2)} \leqslant \dfrac{1}{3(2n+1)} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$S_{2n+3}-S_{2n+1} = \sin\left(\frac{(-1)^{2n+3}\pi}{3(2n+3)}\right)+\sin\left(\frac{(-1)^{2n+2}\pi}{3(2n+2)}\right) = \sin\left(\frac{1}{3(2n+2)}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3(2n+3)}\right) \geqslant 0,$$
   puisque $\sin$ est croissant sur $[0,\pi/2]$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{3(2n+3)} \leqslant \dfrac{1}{3(2n+2)} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   - On a $S_{2n+1}-S_{2n} = \sin\left(\dfrac{(-1)^{2n+1}\pi}{3(2n+1)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Ainsi les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Il s'ensuit qu'elles convergent vers un même réel $S$. Nous en déduisons que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $S$ et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{3n}\right)$ converge (et sa somme vaut $S$).

3) La suite $\left((-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ n'admet pas de limite (et elle tend même vers $+\infty$ en valeur absolue) si bien que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$ diverge grossièrement.

**Exercice 8.** Étudier la nature des séries suivantes en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$1)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}}\right), \qquad 2)\ \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha, \qquad 3)\ \sum_{n\geqslant 1}\exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right).$$

***Correction :***

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) 
   - Si $\alpha < 0$, alors $\exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1}\exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right)$ diverge grossièrement.
   - Si $\alpha = 0$, $\exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right) = e^{-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et donc la série diverge grossièrement.
   - Si $\alpha \in ]0,1]$ alors, pour tout $n \geqslant 2$, $(\ln(n))^\alpha \leqslant \ln(n)$ si bien que $\exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right) \geqslant \exp\left(-\ln(n)\right) = \dfrac{1}{n}$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge si bien que $\sum_{n\geqslant 1}\exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right)$ diverge.
   - Si $\alpha \in ]1,+\infty[$, alors $(\ln(n))^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $(\ln(n))^{\alpha-1}\geqslant 2$. Ainsi $(\ln(n))^\alpha \geqslant 2\ln(n) = \ln(n^2)$ et donc $\exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right) \leqslant \exp\left(-\ln(n^2)\right) = \dfrac{1}{n^2}$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge si bien que $\sum_{n\geqslant 1}\exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right)$ converge.

**Exercice 9.** On considère la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$. Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.

1) Montrer que cette série converge. Notons $S$ sa somme.
2) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|S-S_n|\leqslant 2^{-n}$.
3) Écrire un programme en `Scilab` qui prend un réel $\varepsilon$ en entrée et qui calcule une valeur approchée de $S$ à $\varepsilon$-près.

***Correction :***

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|2^{-n}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Comme $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{2^n}$ converge. Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|2^{-n}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)\right|$ converge et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$ aussi.
2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$|S-S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left|2^{-k}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2^{-n}.$$
3) Soit $\varepsilon > 0$. Pour obtenir une valeur approchée à $\varepsilon$-près de $S$ il suffit de calculer $S_n$ avec $n$ tel que $2^{-n}\leqslant\varepsilon$, i.e. $-n\ln(2)\leqslant\ln(\varepsilon)$. On prend donc $n = \left\lfloor -\dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}\right\rfloor + 1$. D'où le programme :

```
eps=input('Entrez la précision :');
n=floor(-log(eps)/log(2))+1;
s=0;
for  k=1:n
     s=s+2∧(-k)*sin(%pi/(2∧k));
end
disp('Une valeur approchée de S à '+string(eps)+'-près est'+string(s)+'.')
```

## II Exercices théoriques

**Exercice 13 (critère des séries alternées).** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs, décroissante et de limite nulle.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n u_n$ converge et que sa somme $S$ vérifie $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Notons $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes de la série. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

***Correction :***

1)
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}u_{2n+2} + (-1)^{2n+1}u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$ puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3}u_{2n+3} + (-1)^{2n+2}u_{2n+2} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0$ puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}u_{2n+1} = -u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Ainsi $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2) Ainsi les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $S$. Il s'ensuit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S$. Cela signifie que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n u_n$ converge . Par ailleurs le théorème de convergence des suites adjacentes entraîne également que $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   - $0 \geqslant R_{2n} = S - S_{2n} \geqslant S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}$ donc $|R_{2n}| \leqslant u_{2n+1}$.
   - $0 \leqslant R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}$ donc $|R_{2n+1}| \leqslant u_{2n+2}$.

   Ainsi $|R_n| \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 14 (critère de D'Alembert).** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0,+\infty[ \cup \{+\infty\}$.

1) Montrer que, si $\lambda < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   *On pourra comparer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec le terme général d'une suite géométrique.*
2) Montrer que, si $\lambda > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
3) Montrer que, si $\lambda = 1$, alors on ne peut pas conclure en général.

***Correction :***

1) Supposons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0,1[$. On a $\lambda < \dfrac{\lambda+1}{2}$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{\lambda+1}{2}$. Par produit télescopique, nous en déduisons que, pour tout $N \geqslant n_0 + 1$,

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1}\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \prod_{n=n_0}^{N-1}\frac{\lambda+1}{2} = \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^{N-n_0},$$

et donc $0 < u_N \leqslant u_{n_0}\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)^{N-n_0}$. Puisque $\dfrac{\lambda+1}{2} \in ]0,1[$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^n$ converge et donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge.

2) • Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in ]1,+\infty[$. On a $\frac{\lambda+1}{2} < \lambda$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{\lambda+1}{2}$. Par produit télescopique, nous en déduisons que, pour tout $N \geqslant n_0+1$,

$$\frac{u_N}{u_{n_0}} = \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \prod_{n=n_0}^{N-1} \frac{\lambda+1}{2} = \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^{N-n_0},$$

et donc $u_N \geqslant u_{n_0}\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^{N-n_0}$. Puisque $\frac{\lambda+1}{2} \in ]1,+\infty[$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant n_0} \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^n$ diverge et donc $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge (et même grossièrement d'ailleurs).

• Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$. On aboutit à la même conclusion en remplaçant $\frac{\lambda+1}{2}$ par $2$ (par exemple) dans la preuve ci-dessus.

3) • Si $u_n = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge.

• Si $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge.

Ainsi on ne peut pas conclure en général.

**Exercice 15 (critère de Cauchy).**

1) a) Montrer que, si $\lambda < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   b) Montrer que, si $\lambda > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   c) Montrer que, si $\lambda = 1$, alors on ne peut pas conclure en général.

2) Montrer que, si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0,+\infty[ \cup \{+\infty\}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$. La réciproque est-elle vraie ? Quel est le critère le plus "puissant" entre celui de Cauchy et celui de D'Alembert.

***Correction :***

1) a) Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in [0,1[$. On a $\lambda < \frac{\lambda+1}{2}$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 < \sqrt[n]{u_n} \leqslant \frac{\lambda+1}{2}$ et donc $\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^n$. Puisque $\frac{\lambda+1}{2} \in ]0,1[$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant n_0} \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^n$ converge et donc $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge.

b) • Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in ]1,+\infty[$. On a $\frac{\lambda+1}{2} < \lambda$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \geqslant \frac{\lambda+1}{2}$ et donc $u_n \geqslant \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^n$. Puisque $\frac{\lambda+1}{2} \in ]1,+\infty[$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant n_0} \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^n$ diverge et donc $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge (et même grossièrement d'ailleurs).

• Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$. On aboutit à la même conclusion en remplaçant $\frac{\lambda+1}{2}$ par $2$ (par exemple) dans la preuve ci-dessus.

c) • Si $u_n = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt[n]{u_n} = e^{-2\ln(n)/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ (par croissances comparées) et $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge.

• Si $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt[n]{u_n} = e^{-\ln(n)/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ (par croissances comparées) et $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge.

Ainsi on ne peut pas conclure en général.

2) Correction à venir. Cette question est assez technique et pourra être omise en première lecture.

**Exercice 16.**

2) b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de $\sum_{n \geqslant 1} x^{H_n}$ où $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne la série harmonique.

*On pourra montrer au préalable que, pour tout* $x \in [-1, 1]$, $0 \leqslant e^x - 1 - x \leqslant x^2$.

***Correction :*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x^{H_{n+1}}}{x^{H_n}} = x^{1/(n+1)} = e^{\ln(x)/(n+1)}$. Posons $K_n = \dfrac{x^{H_{n+1}}}{x^{H_n}} - 1 - \dfrac{\ln(x)}{n}$. On a

$$\frac{\ln(x)}{n} - \frac{\ln(x)}{n+1} \leqslant K_n \leqslant \frac{\ln(x)}{n} - \frac{\ln(x)}{n+1} + \left(\frac{\ln(x)}{n+1}\right)^2$$

donc

$$\frac{\ln(x)}{n(n+1)} \leqslant K_n \leqslant \frac{\ln(x)}{n(n+1)} + \left(\frac{\ln(x)}{n+1}\right)^2.$$

Nous en déduisons que $(n^2 K_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée. Ainsi les questions précédentes entraînent que $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n^{-\ln(x)}}$ pour un certain $\lambda > 0$. Par conséquent $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $-\ln(x) > 1$, c'est-à-dire $x < 1/e$.