Feuille d'exercice n° 2

Ensembles de nombres, calculs algébriques et inégalités

I Nombres réels, équations, inéquations

Exercice 1. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 2. Soient x, y et z des nombres réels.

1) Étudier le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité triangulaire renversée.
2) Montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$ avec égalité si et seulement si $x=y$.
3) Montrer que $(x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$ avec égalité si et seulement si $x=y$.
4) Montrer que $|x|+|y| \leqslant |x+y|+|x-y|$ avec égalité si et seulement si $x=y$ ou $x=-y$.
5) Montrer que $xy+yz+xz \leqslant x^2+y^2+z^2$ avec égalité si et seulement si $x=y=z$.

Exercice 3.

1) Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ pour tout réel x.
2) Montrer que, pour tous réels x et y, $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0,1\}$.
3) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Exercice 4. Résoudre l'équation $\lfloor 2x+5 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Indication : on pourra différencier les cas où $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1/2$ *et* $\lfloor x \rfloor + 1/2 \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercice 5. Simplifier les expressions suivantes (fractions irréductibles, puissances de nombres premiers) :

$$2^{n+1}-2^n, \quad 3^n+3^n+3^n, \quad \left(5^{5^n}\right)^{5^n}, \quad \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^4+4}+\sqrt{x^4+3}},$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et x, y des réels tels que $0 < |y| \leqslant |x|$.

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$|7x-4| = |3-2x|, \qquad |x-19| = |x+11|, \qquad (9-x)(x+3) = 30,$$
$$13x-5x^2 = 9, \qquad 6x^4+11x^2-7 = 0, \qquad \sqrt{1+x}-\sqrt{4-x} = 2,$$

et le système d'équation $\left\{\begin{array}{l} 3x+y=12 \\ xy=9 \end{array}\right.$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$|2x-5| < |x+3|, \qquad 23x-12x^2 \geqslant 10, \qquad 2(x-2)(1-2x)+1 < x(x+3),$$
$$x^2-4|x| \leqslant 5, \qquad e^x > 1+6e^{-x}, \qquad \frac{1}{3x^2+2x+4} \geqslant \frac{2}{5x^2+6x+1}.$$

Exercice 8. Simplifier $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

Exercice 9. Déterminer $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right[$ et $\beta \in \left]-\dfrac{\pi}{5}, 0\right]$ tels que $\dfrac{19\pi}{12} \equiv \alpha \left[\dfrac{\pi}{3}\right]$ et $\dfrac{19\pi}{12} \equiv \beta \left[\dfrac{\pi}{5}\right]$.

II Manipulation de sommes et de produits

Exercice 10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Calculer les sommes

$$\sum_{k=p}^{n} k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=p}^{n} x^k.$$

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme des entiers pairs de 0 à $2n$ et la somme des entiers impairs de 1 à $2n+1$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{i=n}^{3n+1} 2^{i+1}, \qquad \sum_{j=0}^{2n} \frac{7^j - 2 \cdot 3^{2j}}{5^j}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 3^{2k-1}, \qquad \sum_{k=1}^{2n-1} 2^{k/2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \ln(k),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right), \qquad \sum_{k=2}^{n} k \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k \cdot k!.$$

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les produits $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

Exercice 14.

1) Déterminer deux réels α et β tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{\alpha}{k+1} + \frac{\beta}{k+3}$.

   En déduire une expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$, où $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 15. Soient n un entier naturel non nul. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $S_p(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$.

1) Donner une expression de $S_0(n)$ et $S_1(n)$.
2) a) Pour tous entiers naturels k et p, développer $(k+1)^p - k^p$.
   b) En déduire une relation de récurrence vérifiée par la suite $\big(S_p(n)\big)_{p \in \mathbb{N}}$.
   c) Retrouver les expressions (vues en cours) de $S_1(n)$, $S_2(n)$ puis $S_3(n)$.

Exercice 16. Soient x un réel et n un entier naturel.

1) Pour $n \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$.
2) Pour $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1) x^{k-2}$.
3) En déduire une expression des sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k x^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire, à l'aide de factorielles,

$$\prod_{i=0}^{n} (i+2), \qquad \prod_{j=1}^{n} (j-1), \qquad \prod_{k=1}^{n} (n+k), \qquad \prod_{\ell=1}^{n} \ell^2 (\ell+1)^3.$$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire, en fonction de 2^n, $n!$ et $(2n+1)$,

— le produit des entiers pairs de 2 à $2n$,

— le produit des entiers impairs de 1 à $2n+1$.

Exercice 19. A l'aide d'une factorisation, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 20. Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Montrer que

$$\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes

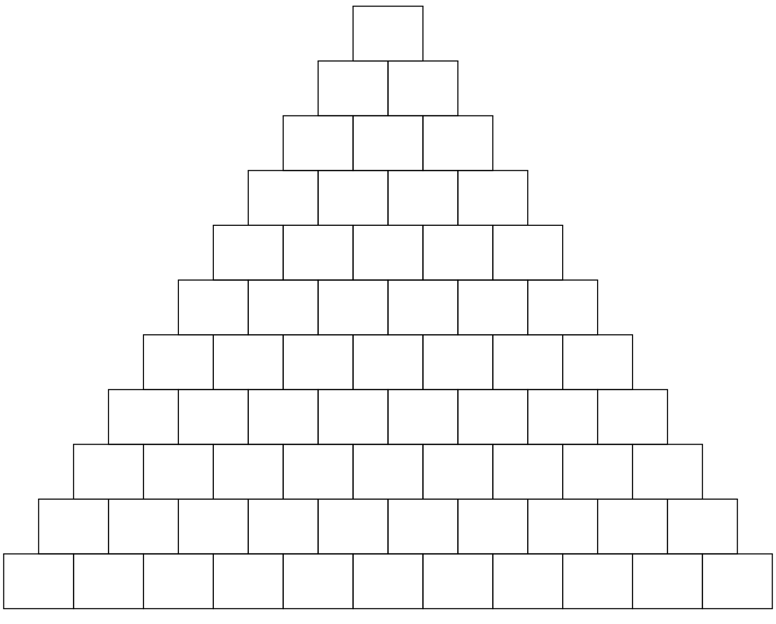
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k\binom{n}{k}.$$

Exercice 22. Montrer de deux manières différentes que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Exercice 23. Le triangle de Pascal est un tableau triangulaire tel que le nombre dans la case à l'intersection de la ligne $n \in \mathbb{N}$ (attention la première ligne est la ligne 0) et de la colonne $k \in [\![0, n]\!]$ est $\binom{n}{k}$. On le construit de haut en bas de façon algorithmique à l'aide de la formule de Pascal.

Construire le triangle de Pascal (sous forme pyramidale) limité à $n = 10$.



Exercice 24 (inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des réels.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$.

   Indice : on pourra étudier le polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| + X|y_i|\big)^2$.

2) Application : montrer que $\displaystyle\frac{6n}{(n+1)(2n+1)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

III Sommes doubles

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j), \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j), \qquad \sum_{(i,j)\in A_n} (i+j), \qquad \sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n} \frac{k}{1+\ell},$$

$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j), \qquad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2^{\min(i,j)}, \qquad \sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} n^{p+q},$$

où $A_n = \{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 : k+\ell = n\}$.