Correction de quelques exercices de la feuille de TD 19

Exercice 1.

1) Montrer que les suites de termes généraux $n\ln(n)$, $\dfrac{n^2}{(\ln(n))^{10!}}$, $\dfrac{3^n}{n^3}$, $n^{3/2}$, $2^n\ln(n)$ tendent toutes vers $+\infty$. Classez-les de la plus lente à la plus rapide (c'est-à-dire par ordre croissant pour la négligeabilité).
2) Montrer que les suites de termes généraux $\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$, $n^{1000}e^{-n}$, $\dfrac{n}{4^n}$, $\dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}}$, $\dfrac{1}{n^2}$ tendent toutes vers 0. Classez-les de la plus rapide à la plus lente (c'est-à-dire par ordre croissant pour la négligeabilité).

Correction :

1) Traité en cours.
2) On a l'échelle :

$$0 \qquad \frac{n}{4^n} \qquad n^{1000}e^{-n} \qquad \frac{1}{n^2(\ln(n))^{100}} \qquad \frac{1}{n^2} \qquad \frac{(\ln(n))^2}{n^2}$$

En effet

- $\dfrac{n/4^n}{n^{1000}e^{-n}} = \left(\dfrac{e}{4}\right)^n \dfrac{1}{n^{999}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en tant que produit de deux suites qui convergent vers 0, puisque $0 < \dfrac{e}{4} < 1$. Ainsi $\dfrac{n}{4^n} = o\left(n^{1000}e^{-n}\right)$.
- $\dfrac{n^{1000}e^{-n}}{1/\left(n^2(\ln(n))^{100}\right)} = n^{1002}e^{-n}(\ln(n))^{100} = n^{1003}e^{-n} \times \dfrac{(\ln(n))^{100}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi $n^{1000}e^{-n} = o\left(\dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}}\right)$.
- $\dfrac{1/\left(n^2(\ln(n))^{100}\right)}{1/n^2} = \dfrac{1}{(\ln(n))^{100}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
- $\dfrac{1/n^2}{(\ln(n))^2/n^2} = \dfrac{1}{(\ln(n))^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}\right)$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e$.

Correction : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)^{u_n} = \exp\left(u_n\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)\right)$.
Or $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right) \sim \dfrac{1}{u_n}$ et donc $u_n\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right) \sim u_n\dfrac{1}{u_n} = 1$. Nous en déduisons que $u_n\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc, par continuité de $\exp$ en 1, on obtient $\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.

Exercice 4. Montrer que, pour tous $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $k\in[\![0,n-2]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{k!}{n!} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.
En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout $k\in[\![0,n-2]\!]$, on a $k! \leqslant (n-2)!$ donc $0 \leqslant \dfrac{k!}{n!} \leqslant \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.
Ainsi

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}.$$

Nous ne déduisons, par encadrement, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Enfin $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{n!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ si bien que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

Exercice 5. Donner un équivalent simple et la limite des suites de terme général :

1) $\pi n - 4\ln(n)$,
2) $\sqrt{n^2+3n} - n$,
3) $\sin\left(\dfrac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}\right)$,
4) $1 - 2n^4 + 9n^3\cos(n) + 7n^5\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$,
5) $\dfrac{\ln(n)}{n+1} - \dfrac{\ln(n+1)}{n}$,
6) $\dfrac{1}{n} + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
7) $n^{100!} - 10\,n! + 100^n$,
8) $\dfrac{4-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5-n^2+6}}$,
9) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{3^k}$,
10) $\ln(n+3) - \ln(n+\sqrt{5})$,
11) $\ln\big(\cos\big(\tan\big(3e^{-n}\big)\big)\big)$,
12) $n - \sqrt[4]{n^4\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

Correction : Nous avons traité la plupart en cours.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)}{n} = \frac{\ln(n)}{n+1} - \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{\ln(n)}{n}\left(\frac{n}{n+1} - 1 - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right).$$

Or on a $\dfrac{n}{n+1} - 1 = \dfrac{-1}{n+1} \sim \dfrac{-1}{n}$ et $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \sim \dfrac{1}{n\ln(n)} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ si bien que $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}\left(-\dfrac{1}{n} - o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ c'est-à-dire $u_n \sim -\dfrac{\ln(n)}{n^2}$.

6) On a $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ car $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\sqrt{n}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim 1$ et donc

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

c'est-à-dire $\dfrac{1}{n} + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

8) On a $4 - 3n^2 \sim -3n^2$ et $4n^5 - n^2 + 6 \sim 4n^5$ donc $\sqrt[3]{4n^5-n^2+6} \sim \sqrt[3]{4}n^{5/3}$ si bien que

$$\frac{4-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5-n^2+6}} \sim \frac{-3n^2}{4^{1/3}n^{5/3}} \sim -\frac{3\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{4}}.$$

10) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\ln(n+3) - \ln(n+\sqrt{5}) = \ln\left(\frac{n+3}{n+\sqrt{5}}\right) = \ln\left(1 + \frac{3-\sqrt{5}}{n+\sqrt{5}}\right).$$

Puisque $\dfrac{3-\sqrt{5}}{n+\sqrt{5}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient que $\ln(n+3) - \ln(n+\sqrt{5}) \sim \dfrac{3-\sqrt{5}}{n+\sqrt{5}} \sim \dfrac{3-\sqrt{5}}{n}$.

Exercice 6. Déterminer un équivalent de la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$.

Correction : On a montré dans le chapitre 5 que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

On a $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$ donc $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = o\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ et donc $\phi_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Exercice 9. A l'aide de sommes de Riemann, calculer des équivalents des suites suivantes :

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} k^\alpha, \quad \alpha > 0, \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}, \qquad 3)\ \sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right).$$

Correction :

1) Traité en cours.
2) Traité en cours.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right) = n^2\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right).$$
La fonction $x \longmapsto x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x^2\right)$ est continue sur $[0,1]$ donc le théorème de convergence des sommes de Riemann entraîne que
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\pi}{2}2x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$
Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right) \sim \frac{n^2}{\pi}$.

Exercice 11. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
2) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et si $a < b$, alors $u_n^a \underset{+\infty}{=} o(u_n^b)$.
3) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et si $0 < a < b$, alors $a^{u_n} \underset{+\infty}{=} o(b^{u_n})$.
4) $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Correction :

1) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Comme $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $v_n \neq 0$ pour n assez grand et donc
$$\left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \frac{M}{|v_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Ainsi, par encadrement, on a $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
2) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $a - b < 0$, on a $\dfrac{u_n^a}{u_n^b} = u_n^{a-b} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $u_n^a \underset{+\infty}{=} o(u_n^b)$.
3) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et comme $0 < \dfrac{a}{b} < 1$, alors $\dfrac{a^{u_n}}{b^{u_n}} = \exp\left(u_n\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $a^{u_n} \underset{+\infty}{=} o(b^{u_n})$.
4) Si $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$ alors $e^{u_n - v_n} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Puisque $\ln$ est continue en 1, on obtient que $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.
Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ alors, puisque $\exp$ est continue en 0, on obtient que $\dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$, c'est-à-dire $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

Exercice 14.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ que l'on notera x_n.
2) Déterminer un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = \dfrac{\pi}{2} + n\pi - x_n$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$.
   b) En déduire un équivalent simple de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   c) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} a_n + b_n + o\left(b_n\right)$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des suites que l'on précisera. On parle de développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \longmapsto \tan(x) - x$ est dérivable sur $I_n = \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $x \in I_n$, $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = n\pi$. Ainsi f est strictement croissante sur I_n. Ensuite $\lim\limits_{x\to(n\pi-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(n\pi+\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$ donc f réalise une bijection de I_n sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un unique réel x tel que $f(x) = 0$. Notons le x_n.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n\pi - \dfrac{\pi}{2} \leqslant x_n \leqslant n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ donc $1 - \dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{x_n}{n\pi} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2n}$. Par encadrement, nous obtenons que $\dfrac{x_n}{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, c'est-à-dire $x_n \sim n\pi$.
3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $x_n \neq 0$ et $\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right)\right) = \dfrac{1}{x_n}$. Comme $\tan$ est π-périodique, on a

$$\tan(y_n) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - x_n\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)} = \frac{\cos\left(x_n\right)}{\sin\left(x_n\right)} = \frac{1}{\tan(x_n)} = \frac{1}{x_n},$$

   puisque $x_n = \tan(x_n)$, par définition.
   Ainsi $\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right)\right) = \tan(y_n)$ et donc $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right) \equiv x_n\,[\pi]$. Mais puisque $y_n \in]0,\pi[$ et $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right) \in]0,\pi[$, on en déduit que $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right) = y_n$.

   b) Puisque $x_n \sim n\pi$, on a $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $y_n = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right) \sim \dfrac{1}{x_n} \sim \dfrac{1}{n\pi}$.
   c) On a $y_n = \dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)$ donc

$$x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - y_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{1}{n\pi} - o\left(\frac{1}{n\pi}\right) = a_n + b_n + o\left(b_n\right),$$

   avec $a_n = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ et $b_n = \dfrac{-1}{n\pi}$.