Feuille d'exercice n° 19

Étude asymptotique des suites

Exercice 1.

1) Montrer que les suites de termes généraux $n\ln(n)$, $\dfrac{n^2}{(\ln(n))^{10!}}$, $\dfrac{3^n}{n^3}$, $n^{3/2}$, $2^n\ln(n)$ tendent toutes vers $+\infty$. Classez-les de la plus lente à la plus rapide (c'est-à-dire par ordre croissant pour la négligeabilité).

2) Montrer que les suites de termes généraux $\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$, $n^{1000}e^{-n}$, $\dfrac{n}{4^n}$, $\dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}}$, $\dfrac{1}{n^2}$ tendent toutes vers 0. Classez-les de la plus rapide à la plus lente (c'est-à-dire par ordre croissant pour la négligeabilité).

Exercice 2. Calculer la limite (si elle existe) des suites de terme général :

1) $n!\sin\left(\dfrac{1}{n^n}\right)$,
2) $3^n\ln\left(1-e^{-n}\right)$,
3) $n\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}\right)$,
4) $\dfrac{\ln(3n^2+4n+5)}{\ln(n)}$,
5) $n^2\ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)$,
6) $n^2\left(\sqrt[n]{1+n}-\sqrt[n]{n}\right)$,
7) $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$,
8) $\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{n^3}\right)^{1/n}}{1-\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{1/n}}$

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n}=e$.

Exercice 4. Montrer que, pour tous $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $k\in[\![0,n-2]\!]$, $0\leqslant\dfrac{k!}{n!}\leqslant\dfrac{1}{n(n-1)}$.
En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. Donner un équivalent simple et la limite des suites de terme général :

1) $\pi n-4\ln(n)$,
2) $\sqrt{n^2+3n}-n$,
3) $\sin\left(\dfrac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}\right)$,
4) $1-2n^4+9n^3\cos(n)+7n^5\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$,
5) $\dfrac{\ln(n)}{n+1}-\dfrac{\ln(n+1)}{n}$,
6) $\dfrac{1}{n}+\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
7) $n^{100!}-10\,n!+100^n$,
8) $\dfrac{4-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5-n^2+6}}$,
9) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{3^k}$,
10) $\ln(n+3)-\ln(n+\sqrt{5})$,
11) $\ln\left(\cos\left(\tan\left(3e^{-n}\right)\right)\right)$,
12) $n-\sqrt[4]{n^4\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

Exercice 6. Déterminer un équivalent de la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\phi_0=0$, $\phi_1=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\phi_{n+2}=\phi_{n+1}+\phi_n$.

Exercice 7. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}$.

On pourra commencer par déterminer un équivalent de $\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Exercice 8 (oral ESCP 2006). A l'aide du théorème d'encadrement et d'un équivalent usuel, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{\ln(k)}{n^2}\right)$.

Exercice 9. A l'aide de sommes de Riemann, calculer des équivalents des suites suivantes :

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha},\quad \alpha>0, \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+2k)^3}, \qquad 3)\ \sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right).$$

Exercice 10. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

1) Montrer que, pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, $\ln(1+x)\leqslant x$.
2) En déduire que, pour tout $k\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\ln(k+1)-\ln(k)\leqslant\dfrac{1}{k}\leqslant\ln(k)-\ln(k-1)$.
3) Donner un équivalent simple de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 11. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que :

1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $|v_n|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, alors $u_n\underset{+\infty}{=}o(v_n)$.
2) Si $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et si $a<b$, alors $u_n^a\underset{+\infty}{=}o(u_n^b)$.
3) Si $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et si $0<a<b$, alors $a^{u_n}\underset{+\infty}{=}o(b^{u_n})$.
4) $e^{u_n}\underset{+\infty}{\sim}e^{v_n}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

Exercice 12. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $v_n\underset{+\infty}{\sim}u_n$. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell\in\mathbb{R}_+\backslash\{1\}$ ou tende vers $+\infty$. Montrer que $\ln(v_n)\underset{+\infty}{\sim}\ln(u_n)$.

Exercice 13.

1) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation $x+\ln(x)=n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ que l'on notera x_n.
2) Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle tend vers $+\infty$.
3) Montrer que $\ln(x_n)\underset{+\infty}{=}o(x_n)$ et déterminer un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4) Montrer que $y_n=x_n-n+\ln(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
5) Montrer que $x_n\underset{+\infty}{=}n-\ln(n)+\dfrac{\ln(n)}{n}+o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$. On parle de développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 14.

1) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation $\tan(x)=x$ admet une unique solution dans $\left]n\pi-\dfrac{\pi}{2},n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[$ que l'on notera x_n.
2) Déterminer un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $y_n=\dfrac{\pi}{2}+n\pi-x_n$.
   a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $y_n=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$.
   b) En déduire un équivalent simple de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   c) Montrer que $x_n\underset{n\to+\infty}{=}a_n+b_n+o\left(b_n\right)$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des suites que l'on précisera. On parle de développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.