Correction de quelques exercices de la feuille de TD 18

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}$.
2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leqslant y\}$.
3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 1 + 2y\}$.
4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 0\}$.
6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = 0\}$.
7) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5x + 2z = 0\}$.
8) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ \text{et } 2x - y = 0 \end{array}\right\}$.
9) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-y)^2 = 2x + y\}$.
10) $\{(x-y, 2x+y, y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.
11) $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
12) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathfrak{Re}(z) = 1\}$.
13) L'ensemble des suites réelles bornées.
14) L'ensemble des suites réelles croissantes.
15) L'ensemble des suites réelles monotones.
16) L'ensemble des suites géométriques.
17) L'ensemble des suites arithmétiques.
18) L'ensemble $E_{a,b}$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de raison $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (cf. chapitre 5).
19) L'ensemble des suites qui convergent vers -1.
20) $\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, \deg(P) = n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
21) $\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, A \text{ divise } P\}$, pour $A \in \mathbb{K}[X]$.
22) $\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, 0 \text{ est racine } P\}$.
23) $\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, 0 \text{ est racine double de } P\}$.
24) L'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui s'annulent.
25) L'ensemble des fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$, pour $T > 0$.
26) L'ensemble des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$.
27) L'ensemble des fonctions affines.
28) L'ensemble des bijections de $[a,b] \to \mathbb{R}$.
29) L'ensemble des fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que $f(a) = f'(a) = 0$,
30) $\{M \in \mathcal{M}_n(K) \,|\, M^2 = M\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
31) $\left\{f \in C^0([a,b],\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_a^b f(t)\,dt = 0\right\}$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Correction : La plupart ont été traitées en cours.

10) Posons $F = \{(x-y, 2x+y, y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Puisque $(0-0, 2\cdot 0 + 0, 0) \in F$, on a $F \neq \varnothing$.

   Ensuite, donnons-nous $(x-y, 2x+y, y) \in F$, $(x'-y', 2x'+y', y') \in F$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a
   $$\lambda(x-y, 2x+y, y) + \mu(x'-y', 2x'+y', y') = (X - Y, 2X + Y, Y) \in F$$
   avec $X = \lambda x + \mu x' \in R$ et $Y = \lambda y + \mu y' \in \mathbb{R}$. Ainsi F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

18) Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Rappelons que $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Tout d'abord il contient la suite nulle (il suffit de considérer $u_0 = u_1 = 0$). Ensuite, donnons-nous $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $E_{a,b}$ et soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(au_{n+1} + bu_n) + \mu(av_{n+1} + bv_n) = a(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + b(\lambda u_n + \mu v_n),$$
   si bien que $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$. Il s'agit donc bien d'un sous-espace vectoriel.

24) L'ensemble des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel. En effet considérons les fonctions sin (qui est 2π-périodique) et $\phi : x \longmapsto \sin(2\pi x)$ (qui est 1-périodique). Montrons que $\sin + \phi$ n'est pas périodique. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $T > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sin + \phi)(x + T) = (\sin + \phi)(x)$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\sin(x) - \sin(x+T) = \phi(x+T) - \phi(x) = \sin(2\pi x + 2\pi T) - \sin(2\pi x)$$
   donc
   $$2\cos\left(x + \frac{T}{2}\right)\sin\left(-\frac{T}{2}\right) = 2\cos(2\pi x + \pi T)\sin(\pi T).$$

- Si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $T = 2k\pi$, alors $0 = 2\cos(2\pi x + 2k\pi^2)\sin(2k\pi^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est absurde.
- Sinon on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(x + \dfrac{T}{2}\right) = -\dfrac{2\cos(2\pi x + \pi T)\sin(\pi T)}{\sin(T/2)}$ et donc
$$\cos(x) = -\frac{2\cos(\pi x)\sin(\pi T)}{\sin(T/2)}.$$
C'est absurde, car cela signifierait que $\cos$ est 1-périodique.

27) La fonction nulle est affine. Ensuite, donnons-nous f et g deux fonctions affines (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par définition, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$. Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda(ax + b) + \mu(cx + d) = (\lambda a + \mu c)x + (\lambda b + \mu d).$$
Ainsi $\lambda f + \mu g$ est affine. L'ensemble des fonctions affines est donc un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

29) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Si f désigne la fonction nulle, alors elle est dérivable sur $[a, b]$ et $f(a) = f'(a) = 0$. Ensuite, donnons-nous f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ telles que $f(a) = f'(a) = 0 = g'(a) = g'(a)$. Donnons-nous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a $\lambda f + \mu g$ dérivable sur $[a, b]$ et
$$(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda f(a) + \mu g(a) = 0 + 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad (\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a) = 0 + 0 = 0.$$
Ainsi il s'agit d'un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

30) Soit $\mathbb{N}^*$. L'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid M^2 = M\}$ contient la matrice $E_{1,1}$ mais pas la matrice $2 \cdot E_{1,1}$. Par conséquent il ne s'agit pas d'un espace vectoriel.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ une autre multiplication externe $*$ par
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^*, \qquad \lambda * (x, y) = (\lambda x, 0).$$
Est-ce que $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Correction : Pour que $(\mathbb{R}^2, +, *)$ soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il faut notamment que la dernière propriété de la définition soit vérifiée (c'est-à-dire $1 * (x, y) = (x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$). Ce n'est pas le cas : en effet $1 * (1, 1) = (1, 0) \neq (1, 1)$. Ainsi $(\mathbb{R}^2, +, *)$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\big(x \mapsto 1,\, x \mapsto e^x,\, x \mapsto e^{2x},\, \ldots,\, x \mapsto e^{nx}\big)$ est une famille libre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction : Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons $f_k : x \longmapsto e^{kx}$. Les vecteurs de la famille $\big(x \mapsto 1,\, x \mapsto e^x,\, x \mapsto e^{2x},\, \ldots,\, x \mapsto e^{nx}\big)$ appartiennent bien à $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{kx} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) = 0.$$
Divisant par e^{nx}, on obtient
$$\lambda_n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k e^{(k-n)x} = 0.$$
En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\lambda_n + 0 = 0$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f_k = 0$. Divisant par $e^{(n-1)x}$, on obtient
$$\lambda_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k e^{(k-n+1)x} = 0.$$
En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\lambda_{n-1} + 0 = 0$. Et ainsi de suite... par récurrence descendante, on montrer que $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Ainsi la famille $\left(x \mapsto 1,\, x \mapsto e^{x},\, x \mapsto e^{2x},\, \ldots,\, x \mapsto e^{nx}\right)$ est libre .

Exercice 6. Soient $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=1$, $v_n=n$, $w_n=2^n$ et $x_n=3^n$. Montrer que (u,v,w,x) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\alpha u+\beta v+\gamma w+\delta x=0$. On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha+\beta n+\gamma 2^n+\delta 3^n=\alpha u_n+\beta v_n+\gamma w_n+\delta x_n=(\alpha u+\beta v+\gamma w+\delta x)_n=0$.

Évaluons en plusieurs valeurs de n :

- Si $n=0$, $\alpha+\gamma+\delta=0$,
- Si $n=1$, $\alpha+\beta+2\gamma+3\delta=0$,
- Si $n=2$, $\alpha+2\beta+4\gamma+9\delta=0$,
- Si $n=3$, $\alpha+3\beta+8\gamma+27\delta=0$.

Or nous avons

$$\begin{cases}\alpha & & + & \gamma & + & \delta & = & 0\\ \alpha & + & \beta & + & 2\gamma & + & 3\delta & = & 0\\ \alpha & + & 2\beta & + & 4\gamma & + & 9\delta & = & 0\\ \alpha & + & 3\beta & + & 8\gamma & + & 27\delta & = & 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha + \gamma + \delta = 0 & \\ \beta + \gamma + 2\delta = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ 2\beta + 3\gamma + 8\delta = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1\\ 3\beta + 7\gamma + 26\delta = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha + \gamma + \delta = 0 & \\ \beta + \gamma + 2\delta = 0 & \\ \gamma + 4\delta = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2\\ 4\gamma + 20\delta = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha + \gamma + \delta = 0 & \\ \beta + \gamma + 2\delta = 0 & \\ \gamma + 4\delta = 0 & \\ 4\delta = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_3\end{cases}$$

Par remontées successives, on trouve $\delta=0$, puis $\gamma=0$, puis $\beta=0$ et $\alpha=0$.

Ainsi (u,v,w,x) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 7. Notons $\overrightarrow{u}=(1,\,i,\,-3)$, $\overrightarrow{v}=(1-i,\,2,\,i)$ et $\overrightarrow{w}=(2+i,\,3i,\,-4)$.

1) Est-ce que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est une famille liée de $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{C}$-e.v ?
2) Est-ce que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est une famille liée de $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-e.v ?

Correction :

1) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ tel que $a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$. On a alors

$$\begin{cases}a + (1-i)b + (2+i)c = 0\\ ia + 2b + 3ic = 0\\ -3a + ib - 4c = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}a + (1-i)b + (2+i)c = 0 & \\ (1-i)b + (1+i)c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - iL_1\\ (3-2i)b + (2+3i)c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}a + (1-i)b + (2+i)c = 0 & \\ (1-i)b + (1+i)c = 0 & \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow (1-i)L_3 - (3-2i)L_2\end{cases}$$

On en déduit que $b=\dfrac{1+i}{i-1}c=-ic$ puis $a=(1+i)c-(2+i)b=-c$. Ainsi (en prenant $c=-1$) $\overrightarrow{u}+i\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$. Ainsi $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ n'est pas une famille libre de $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{C}$-e.v.

2) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$. On a alors de même

$$\begin{cases} a & + & (1-i)b & + & (2+i)c & = & 0 \\ & & (1-i)b & + & (1+i)c & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \qquad L_3 \leftarrow (1-i)L_3 - (3-2i)L_2 \end{cases}$$

En prenant les parties réelles et imaginaires de la deuxième ligne, on obtient $b+c=0$ et $-b+c=0$ et donc $b=c=0$. On obtient ensuite $a=0$ via la première ligne. Ainsi $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une famille libre de $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-e.v.

Exercice 8. Montrer que les seuls sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites vectorielles (c'est-à-dire les sous-espaces $\{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $u \in \mathbb{R}^2$).

Correction : Soit F un s.e.v de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas $\{(0,0)\}$. Il existe alors $(a,b) \in F\backslash\{(0,0)\}$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \cdot (a,b) \in F$ car F est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$. Ainsi la droite vectorielle $D = \{\lambda \cdot (a,b) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est incluse dans F.

- Ou bien $F = D$.
- Ou bien D est strictement incluse dans F. Dans ce cas, il existe $(c,d) \in F\backslash D$. Montrons qu'alors $F = \mathbb{R}^2$. Il suffit de montrer que tout élément de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de (a,b) et (c,d) (et donc est un élément de F). Donnons-nous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y) = \alpha(a,b) + \beta(c,d)$, c'est-à-dire
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$
Mais puisque (a,b) et (c,d) ne sont pas colinéaires, on a $ad - bc \neq 0$ et donc la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible. Il suffit alors de prendre (α, β) tels que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ainsi on a bien montré que $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Vect}((a,b),(c,d)) \subset F$ et donc $F = \mathbb{R}^2$.

Exercice 9. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice simple.

1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$.
2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+7z=y\}$.
3) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} x-y+z=0 \\ \text{et } 2x-y=0 \end{array}\right\}$.
4) $\{(z, x-y+z, 2x) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.
5) $\{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(2)=0\}$.
6) $\{P \in \mathbb{C}_2[X] \mid P(1-X) = P(X)\}$.
7) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0\}$.

Correction : Nous avons traité les six premiers points. Occupons-nous du dernier.
Notons $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0\}$ et posons

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $a_n = 0$.
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $b_n = 0$.
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $c_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{2\}$, $c_n = 0$.
- $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $d_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{3\}$, $d_n = 0$.

Ces quatre suites appartiennent à F et, pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, on a

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = u_0 \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + u_1 \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + u_2 \cdot (c_n)_{n\in\mathbb{N}} + u_3 \cdot (d_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ainsi $F = \mathrm{Vect}\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Exercice 10. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1) $\mathrm{Vect}\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$,
2) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y+3z-t=0\}$ dans $\mathbb{R}^4$,
3) $\{P \in \mathbb{R}_5[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_5[X]$.

Correction : Nous avons traité les deux derniers points en TD. Faisons la premier : par définition la famille $\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$. Ensuite donnons-nous $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(0,0,0)=\lambda(3,1,-7)+\mu(4,-2,-8)+\gamma(-3,4,5)$. Ainsi

$$\begin{cases} 3\lambda + 4\mu - 3\gamma = 0 \\ \lambda - 2\mu + 4\gamma = 0 \\ -7\lambda - 8\mu + 5\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\lambda + 4\mu - 3\gamma = 0 \\ \quad - 10\mu + 15\gamma = 0 & L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ \quad 4\mu - 6\gamma = 0 & L_3 \leftarrow 3L_3 + 7L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3\lambda + 4\mu - 3\gamma = 0 \\ \quad - 10\mu + 15\gamma = 0 \\ \quad 0 = 0 & L_3 \leftarrow 5L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -\gamma \\ \mu = \dfrac{3}{2}\gamma \end{cases}$$

Ainsi (en prenant $\gamma=2$), on a $(0,0,0)=-2(3,1,-7)+3(4,-2,-8)+2(-3,4,5)$. La famille $\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$ n'est donc pas libre. Puisque chaque vecteur e la famille est combinaison linéaire des deux autres, on peut en enlever un :

$$\mathrm{Vect}\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)=\mathrm{Vect}\big((4,-2,-8),(-3,4,5)\big).$$

On vérifie aisément (en enlevant le γ du système précédent) que la famille $\big((4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$ est libre et donc qu'il s'agit d'une base de $\mathrm{Vect}\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$.

Exercice 11. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner des bases de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vu comme des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Correction :

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

   Pour tout $z\in\mathbb{C}^n$, il existe un unique $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\in\mathbb{C}^n$ tel que $z=\sum_{k=1}^{n}\zeta_k e_k$. Par ailleurs, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, il existe un unique couple $(\lambda_k,\mu_k)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\zeta_k=\lambda_k+i\mu_k$. Nous en déduisons que, pour tout $z\in\mathbb{C}^n$, il existe un unique $(\lambda_1,\mu_1,\dots,\lambda_n,\mu_n)\in\mathbb{C}^{2n}$ tel que

$$z=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k+i\mu_k)e_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k+\sum_{k=1}^{n}\mu_k(ie_k).$$

   Nous en déduisons que $\mathbb{C}^n$, vu comme un $\mathbb{R}$-e.v, admet pour base

$$(e_1,ie_1,e_2,ie_2,\dots,e_n,ie_n).$$

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $P\in\mathbb{C}_n[X]$, il existe un unique $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P=\sum_{k=0}^{n}\zeta_k X^k$. Par ailleurs, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, il existe un unique couple $(\lambda_k,\mu_k)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\zeta_k=\lambda_k+i\mu_k$. Nous en déduisons que, pour tout $P\in\mathbb{C}_n[X]$, il existe un unique $(\lambda_1,\mu_1,\dots,\lambda_n,\mu_n)\in\mathbb{C}^{2n+2}$ tel que

$$P=\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k+i\mu_k)X^k=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k X^k+\sum_{k=0}^{n}\mu_k(iX^k).$$

   Nous en déduisons que $\mathbb{C}_n[X]$, vu comme un $\mathbb{R}$-e.v, admet pour base

$$(1,i,X,iX,X^2,iX^2,\dots,X^n,iX^n).$$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $(\zeta_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}\in\mathbb{C}^{2n}$ tel que

$$M=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\zeta_{k,\ell}E_{k,\ell}.$$

Par ailleurs, pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, il existe un unique couple $(\lambda_{k,\ell},\mu_{k,\ell}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\zeta_{k,\ell} = \lambda_{k,\ell} + i\mu_{k,\ell}$. Nous en déduisons que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $(\lambda_{k,\ell},\mu_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \in \mathbb{C}^{4n}$ tel que

$$z = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(\lambda_{k,\ell} + i\mu_{k,\ell})E_{k,\ell} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\lambda_{k,\ell}E_{k,\ell} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\mu_{k,\ell}(iE_{k,\ell}).$$

Nous en déduisons que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vu comme un $\mathbb{R}$-e.v, admet pour base

$$\big(E_{k,\ell}, iE_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}.$$