Feuille d'exercice n° 18

Introduction aux espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}$.
2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leqslant y\}$.
3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 1 + 2y\}$.
4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 0\}$.
6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = 0\}$.
7) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5x + 2z = 0\}$.
8) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{c} x - y + z = 0 \\ \text{et } 2x - y = 0 \end{array}\right\}$.
9) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-y)^2 = 2x + y\}$.
10) $\{(x-y, 2x+y, y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.
11) $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
12) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathfrak{Re}(z) = 1\}$.
13) L'ensemble des suites réelles bornées.
14) L'ensemble des suites réelles croissantes.
15) L'ensemble des suites réelles monotones.
16) L'ensemble des suites géométriques.
17) L'ensemble des suites arithmétiques.
18) L'ensemble $E_{a,b}$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, où $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
19) L'ensemble des suites qui convergent vers -1.
20) $\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, \deg(P) = n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
21) $\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, A \text{ divise } P\}$, pour $A \in \mathbb{K}[X]$.
22) $\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, 0 \text{ est racine } P\}$.
23) $\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, 0 \text{ est racine double de } P\}$.
24) L'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui s'annulent.
25) L'ensemble des fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$, pour $T > 0$.
26) L'ensemble des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$.
27) L'ensemble des fonctions affines.
28) L'ensemble des bijections de $[a,b] \to \mathbb{R}$.
29) L'ensemble des fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que $f(a) = f'(a) = 0$,
30) $\{M \in \mathcal{M}_n(K) \,|\, M^2 = M\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
31) $\left\{f \in C^0([a,b],\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_a^b f(t)\,dt = 0\right\}$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ une autre multiplication externe $*$ par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^*, \qquad \lambda * (x,y) = (\lambda x, 0).$$

Est-ce que $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 3. Soit F et G deux s.e.v de E. Montrer que si $F \cup G$ est un s.e.v de E, alors $F \subset G$ ou $G \subset F$. *Autrement dit l'union de deux s.e.v est un s.e.v si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.*

Exercice 4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $(P_1, \dots, P_k)$ une famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_k)$. Montrer qu'il s'agit d'une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left(x \mapsto 1,\, x \mapsto e^x,\, x \mapsto e^{2x},\, \dots,\, x \mapsto e^{nx}\right)$ est une famille libre dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 6. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, $v_n = n$, $w_n = 2^n$ et $x_n = 3^n$. Montrer que (u,v,w,x) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 7. Notons $\overrightarrow{u} = (1,\, i,\, -3)$, $\overrightarrow{v} = (1 - i,\, 2,\, i)$ et $\overrightarrow{w} = (2 + i,\, 3i,\, -4)$.

1) Est-ce que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une famille liée de $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{C}$-e.v ?
2) Est-ce que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une famille liée de $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-e.v ?

Exercice 8. Montrer que les seuls sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites vectorielles (c'est-à-dire les sous-espaces $\{\lambda u \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $u \in \mathbb{R}^2$).

Exercice 9. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice simple.

1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$.
2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+7z=y\}$.
3) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{c} x-y+z=0 \\ \text{et } 2x-y=0 \end{array}\right\}$.
4) $\{(z, x-y+z, 2x) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.
5) $\{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(2)=0\}$.
6) $\{P \in \mathbb{C}_2[X] \mid P(1-X)=P(X)\}$.
7) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geqslant 4,\ u_n=0\}$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une base de l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Même question pour l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques.

Exercice 11. Trouver un système d'équations[1] du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $\big((1,0,2,1),(0,3,-1,2),(3,-3,7,1)\big)$. Est-ce une famille libre de $\mathbb{R}^4$? Une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 12. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1) $\operatorname{Vect}\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$,
2) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y+3z-t=0\}$ dans $\mathbb{R}^4$,
3) $\{P \in \mathbb{R}_5[X] \mid P(1)=P'(1)=0\}$ dans $\mathbb{R}_5[X]$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner des bases de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vu comme des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Exercice 14. Soient a, b et c des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Introduisons les polynômes $P_0=1$, $P_1=(X-a)$ et $P_2=(X-a)(X-b)$.

1) A l'aide du théorème de division euclidienne, montrer que (P_0,P_1,P_2) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
2) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (P_0,P_1,P_2) en fonction de $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$.

Exercice 15. On considère l'ensemble

$$F = \big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\big|\, \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\cos(2x) + b\cos(x) + c\big\}.$$

1) Montrer que F est un $\mathbb{R}$-e.v. En déterminer une base.
2) Est-ce que la famille $\big(x \mapsto \cos^2(x),\ x \mapsto 1,\ x \mapsto \cos(2x)\big)$ est une base de F ?
3) Montrer que la famille $\big(x \mapsto \cos^2(x),\ x \mapsto \sin^2(x),\ x \mapsto \cos(x)\big)$ est une base de F.
4) Déterminer les coordonnées de $f : x \longmapsto 1+\cos(x)+\cos^2(x)$ dans les deux bases de F que l'on a déterminées.

1. C'est-à-dire un système dont l'ensemble des solutions est le sous-espace vectoriel concerné.