Correction de quelques exercices de la feuille de TD 17

I Calcul matriciel

Exercice 1. Calculer $A+B$, $A-2B$, AB et BA (si c'est possible) lorsque

1) $A=\begin{pmatrix}3&0&2&1\\-1&-5&0&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}8&2\\-1&3\end{pmatrix}$,

2) $A=\begin{pmatrix}-3&0&8\\1&5&-4\\-1&2&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4&0&0\\-7&-2&0\\1&-3&3\end{pmatrix}$,

3) $A=\begin{pmatrix}i&2+3i\\1+i&-4i\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&7i\\4-5i&-i\end{pmatrix}$,

4) $A=\begin{pmatrix}-3&2&1&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&0\\3&5\\0&-4\end{pmatrix}$,

5) $A=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{17}{5}&\frac{2}{3}\\0&\frac{4}{11}&1\\\frac{1}{5}&-\frac{2}{13}&\frac{5}{4}\\2&\frac{5}{12}&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

Correction :

1) $A+B$, $A-2B$ et AB ne sont pas définies et $BA=\begin{pmatrix}22&-10&16&16\\-6&-15&-2&11\end{pmatrix}$.

2) $A+B=\begin{pmatrix}1&0&8\\-6&3&-4\\0&-1&3\end{pmatrix}$, $A-2B=\begin{pmatrix}-11&0&8\\15&9&-4\\-3&8&-6\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}-4&-24&24\\-35&2&-12\\-18&-4&0\end{pmatrix}$ et

$BA=\begin{pmatrix}-12&0&32\\19&-10&-48\\-9&-9&20\end{pmatrix}$.

3) $A+B=\begin{pmatrix}-1+i&2+10i\\5-4i&-5i\end{pmatrix}$, $A-2B=\begin{pmatrix}2+i&2-11i\\-7+11i&-2i\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}23+i&-4-2i\\-21-17i&-11+7i\end{pmatrix}$

et $BA=\begin{pmatrix}-7+6i&26-3i\\6+3i&19+2i\end{pmatrix}$.

4) $A+B$, $A-2B$ et BA ne sont pas définies et $AB=\begin{pmatrix}-5&-5\end{pmatrix}$.

5) $A+B$, $A-2B$ et AB ne sont pas définies et $BA=\begin{pmatrix}-\frac{11}{6}\\-2\\-\frac{23}{10}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}$.

Exercice 2. Calculer la transposée des matrices $A=\begin{pmatrix}\pi&1&2&-1&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&8\\0&3\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}2&i&1&-i\\0&-3&0&6\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0&2&-3\\2&12&1\\-3&1&-1\end{pmatrix}$, et $E=\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\3&0&3&-4\\5&-6&5&0\end{pmatrix}$.

Correction :

$${}^tA=\begin{pmatrix}\pi\\1\\2\\-1\\7\end{pmatrix},\qquad {}^tB=\begin{pmatrix}-1&0\\8&3\end{pmatrix},\qquad {}^tC=\begin{pmatrix}2&0\\i&-3\\1&0\\-i&6\end{pmatrix},\qquad {}^tD=D,\qquad {}^tE=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&0&-6\\-1&3&5\\2&-4&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, notons $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice (i,j) qui est égal à 1.

Calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$ pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$.

Correction : Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$. Soit $(x,y) \in [\![1,n]\!]^2$. Calculons le coefficient d'indice (x,y) de $E_{i,j}E_{k,\ell}$. On a

$$\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{x,y} = \sum_{z=1}^{n} \left(E_{i,j}\right)_{x,z}\left(E_{k,\ell}\right)_{z,y}.$$

- Si $x \neq i$ alors, pour tout $z \in [\![1,n]\!]$, $\left(E_{i,j}\right)_{x,z} = 0$. Nous en déduisons que $\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{x,y} = 0$.
- Si $x = i$ alors, pour tout $z \in [\![1,n]\!]$, $\left(E_{i,j}\right)_{x,z} = \left(E_{i,j}\right)_{i,z} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z = j \\ 0 & \text{si} \quad z \neq j \end{cases}$

  Ainsi $\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{i,y} = 0 + \cdots + 1 \cdot \left(E_{k,\ell}\right)_{j,y} + \cdots + 0 = \left(E_{k,\ell}\right)_{j,y}$. Nous en déduisons que

  — Si $k = j$, alors $\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{i,y} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y = \ell \\ 0 & \text{si} \quad y \neq \ell \end{cases}$.

  — Si $k \neq j$, alors $\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{i,y} = 0$.

Finalement

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si} \quad j = k \\ \mathrm{O}_n & \text{si} \quad j \neq k \end{cases}$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle trace de la matrice $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on note $\operatorname{tr}(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux : $\operatorname{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1) Soit $(A,B,\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K}$. Montrer que $\operatorname{tr}(A+\lambda B) = \operatorname{tr}(A) + \lambda\operatorname{tr}(B)$ et $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
2) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(A)$.
3) Existe-t-il $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que $AB - BA = \mathrm{I}_n$?

Correction :

1) On a

$$\operatorname{tr}(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^{n}(A+\lambda B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}(a_{i,i} + \lambda b_{i,i}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \operatorname{tr}(A) + \lambda\operatorname{tr}(B)$$

   et, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}\right).$$

   Ainsi

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(BA)_{k,k} = \operatorname{tr}(BA).$$

2) En utilisant la question précédente, on obtient $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}((P^{-1}A)P) = \operatorname{tr}(P(P^{-1}A)) = \operatorname{tr}(A)$.
3) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que $AB - BA = \mathrm{I}_n$. On a alors

$$n = \operatorname{tr}(\mathrm{I}_n) = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0.$$

   C'est absurde.

Exercice 6. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_n & 1-2x_n & 2x_n \\ x_n & -x_n & x_n+1 \end{pmatrix}$.
2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3) En déduire l'expression de M^n en fonction de n.

Correction :

1) Raisonnons par récurrence. Pour commencer on remarque que, si $x_0 = 3$, alors
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_0 & 1-2x_0 & 2x_0 \\ x_0 & -x_0 & x_0+1 \end{pmatrix}.$$
Supposons que la propriété soit vraie au rang n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On calcule alors que
$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_n & 1-2x_n & 2x_n \\ x_n & -x_n & x_n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-4x_n & -5+4x_n & 6-4x_n \\ 3-2x_n & 2x_n-3 & 4-2x_n \end{pmatrix}.$$
Si on pose $x_{n+1} = 3 - 2x_n$, on obtient que
$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_{n+1} & 1-2x_{n+1} & 2x_{n+1} \\ x_{n+1} & -x_{n+1} & x_{n+1}+1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$. Par récurrence elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) On a $x_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 3-2x_n$. Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = 3 - 2x$. On trouve $x = 1$. On montre ensuite que $(x_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique de raison -2 et on en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = 1 + (-2)^n(x_n - 1) = 1 - (-2)^{n+1}$$
et donc
$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+(-2)^{n+2} & -1-(-2)^{n+2} & 2+(-2)^{n+2} \\ 1-(-2)^{n+1} & (-2)^{n+1}-1 & 2-(-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Considérons $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -10 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. En utilisant la formule du binôme, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra écrire $A = 3\mathrm{I}_3 + B$).

Correction : Notons $B = A - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & -10 \\ 3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$. On calcule ensuite que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 12 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ puis $B^3 = \mathrm{O}_3$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $3\mathrm{I}_3$ et B commutent, la formule du binôme de Newton entraîne que
$$A^n = (3\mathrm{I}_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\mathrm{I}_3^{n-k}B^k = 3^n\mathrm{I}_3 + n3^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2}B^2.$$
$$= 3^{n-2}\left(9\mathrm{I}_3 + 3nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2\right).$$
On obtient alors
$$A^n = 3^{n-2}\begin{pmatrix} 9+9n & 9n & -18n \\ 9n-3n(n-1) & 9+15n-3n(n-1) & -30n+6n(n-1) \\ 9n - \dfrac{3n(n-1)}{2} & 12n - \dfrac{3n(n-1)}{2} & 9-24n+3n(n-1) \end{pmatrix}$$
et donc
$$A^n = 3^{n-2}3\begin{pmatrix} 3+3n & 3n & -6n \\ 4n-n^2 & 3+6n-n^2 & -6n+2n^2 \\ \dfrac{7n-n^2}{2} & \dfrac{9n-n^2}{2} & 3-9n+n^2 \end{pmatrix}$$

II Matrices inversibles

Exercice 9. A l'aide d'un polynôme annulateur, montrer que les deux matrices de l'exercice **??** sont inversibles et calculer leur inverse. Vérifier le calcul par la méthode de Gauss Jordan.

Correction : Cet exercice a été traité en cours. Dans ce corrigé, je vous détaille la méthode de Gauss Jordan pour la matrice inversible $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -6 & 7 & -3 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ puisque, rappelez-vous, les calculs étaient fastidieux.

Nous avons

$$
\begin{aligned}
(2A|\mathrm{I}_3) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_1 \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -80 & 24 & 6 & 10 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow 5L_3 + 3L_2 \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 320 & -240 & 0 & 8 & -18 & -30 \\ 0 & 80 & 0 & -24 & 14 & -30 \\ 0 & 0 & -80 & 24 & 6 & 10 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 80L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow 16L_2 - 3L_3 \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 320 & 0 & 0 & -64 & 24 & -120 \\ 0 & 80 & 0 & -24 & 14 & -30 \\ 0 & 0 & -80 & 24 & 6 & 10 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2
\end{aligned}
$$

On divise la première colonne par 4, la deuxième par 2 et la troisième par -2 et on obtient

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 40 & 0 & 0 & -8 & 3 & -15 \\ 0 & 40 & 0 & -12 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 40 & -12 & -3 & -5 \end{array}\right) .
$$

Ainsi $A^{-1} = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} -8 & 3 & -15 \\ -12 & 7 & -15 \\ -12 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Considérons à nouveau la matrice A de l'exercice 9. Est-ce que A est inversible ? Si oui, exprimer son inverse en fonction de A et I_n. Vérifier le calcul par la méthode de Gauss-Jordan.

Correction : On a montré, dans l'exercice 9, que $A^2 - 2A = 3\mathrm{I}_3$. Ainsi $A\left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{I}_3$. Nous en déduisons que A est inversible et que

$$
A^{-1} = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}\mathrm{I}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} .
$$

On vérifie le calcul par la méthode de Gauss Jordan :

$$
\begin{aligned}
(A|\mathrm{I}_3) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & -3 & 0 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 + 2L_3 \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & 8 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 = (3\mathrm{I}_3|3A^{-1}) \end{array}
\end{aligned}
$$

On retrouve donc A^{-1}.

Exercice 12. En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$
A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.
$$

Correction :

$$
\begin{aligned}
(A|\mathrm{I}_3) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 4L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2 \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -20 & 10 & 0 & -16 & 24 & -18 \\ 0 & 30 & 0 & 24 & -36 & 42 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 5L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 + 7L_3 \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -60 & 0 & 0 & -72 & 108 & -96 \\ 0 & 30 & 0 & 24 & -36 & 42 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2
\end{aligned}
$$

D'où A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -9 & 8 \\ 4 & -6 & 7 \\ 7 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

$$(B|\mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & -21 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{array}$$

Ainsi B n'est pas inversible.

Allez on prend son courage à deux mains et on y va...

$$(C|\mathrm{I}_3) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & 5 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 & -5 & 0 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 7L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow 7L_4 - 5L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & 5 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & -7 & -21 & -14 & 21 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow 3L_4 - 2L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -35 & 35 & 105 & 0 & 28 & -21 & -14 & 21 \\ 0 & 35 & 80 & 0 & 13 & -16 & -14 & 21 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 18 & -6 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & -7 & -21 & -14 & 21 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 35L_1 + L_4 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 + L_4 \\ L_3 \leftarrow 5L_3 + L_4 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -70 & 70 & 0 & 0 & -70 & 0 & -175 & -105 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & -105 & 0 & -210 & -105 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 18 & -6 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & -7 & -21 & -14 & 21 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - 7L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 8L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -210 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -105 & -105 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & -105 & 0 & -210 & -105 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 18 & -6 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & -7 & -21 & -14 & 21 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

D'où C est inversible et $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 3/5 & -1/5 & 7/10 & 7/10 \\ -1/5 & -3/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, posons

$$M_{i,j} = \mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}, \quad D_i(\alpha) = \mathrm{I}_n + (\alpha - 1)E_{i,i} \quad \text{et} \quad T_{i,j}(\alpha) = \mathrm{I}_n + \alpha E_{i,j}.$$

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) En quoi consiste le produit $M_{i,j}A$? En déduire que $M_{i,j}$ est inversible et calculer $M_{i,j}^{-1}$.
2) En quoi consiste le produit $D_i(\alpha)A$? En déduire que $D_i(\alpha)$ est inversible et calculer $D_i(\alpha)^{-1}$.
3) En quoi consiste le produit $T_{i,j}(\alpha)A$? En déduire que $T_{i,j}(\alpha)$ est inversible et calculer $T_{i,j}(\alpha)A^{-1}$.

Correction : Avant de commencer, demandons-nous à quoi est égale la matrice $E_{i,j}A$ lorsque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$\left(E_{i,j}A\right)_{k,\ell} = \sum_{x=1}^{n} \left(E_{i,j}\right)_{k,x} a_{x,\ell} = \left(E_{i,j}\right)_{k,j} a_{j,\ell} = \left\{ \begin{array}{ccc} a_{j,\ell} & \text{si} & k=i \\ 0 & \text{si} & k \neq i \end{array} \right. .$$

Ainsi $E_{i,j}A$ est la matrice dont la $i^{\text{ième}}$ ligne est la $j^{\text{ième}}$ ligne de A, et dont tous les autres coefficients sont nuls.

1) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. La matrice $E_{i,i}A$ (resp. $E_{j,j}A$) est la matrice dont la $i^{\text{ième}}$ (resp. $j^{\text{ième}}$) ligne est la $i^{\text{ième}}$ (resp. $j^{\text{ième}}$) ligne de A, et dont tous les autres coefficients sont nuls. Ainsi la matrice $(\mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j})A$ est la matrice A dont on a transformé tous les coefficients des lignes i et j en 0. Nous en déduisons que $M_{i,j}A$ est la matrice A dont les lignes i et j ont été échangées.

   Or on sait que, si on effectue l'opération élémentaire $L_i \longleftrightarrow L_j$ sur les lignes d'une matrice, alors on revient à la matrice initiale en effectuant l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ à nouveau. Nous en déduisons que $M_{i,j}$ est inversible d'inverse $M_{i,j}$.

2) Soit $(i,\alpha) \in [\![1,n]\!] \times \mathbb{K}$. La matrice $(\mathrm{I}_n - E_{i,i})A$ est la matrice A dont on a transformé tous les coefficients de la ligne i en 0. La matrice $\alpha E_{i,i}A$ est la matrice dont la $i^{\text{ième}}$ ligne est la $i^{\text{ième}}$ ligne de A multipliée par α et dont tous les autres coefficients sont nuls. Ainsi $D_i(\alpha)A$ est la matrice A dont les coefficients de la $i^{\text{ième}}$ ligne ont été multipliés par α.

   Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et si on effectue l'opération élémentaire $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ sur les lignes d'une matrice, alors on revient à la matrice initiale en effectuant l'opération $L_i \longleftarrow \dfrac{1}{\alpha} L_i$ à nouveau. Nous en déduisons que $D_i(\alpha)$ est inversible d'inverse $D_i(1/\alpha)$.
   Si $\alpha = 0$, alors $D_i(0)$ n'est pas inversible (il s'agit d'une matrice diagonale dont un coefficient est nul).

3) Soit $(i,j,\alpha) \in [\![1,n]\!]^2 \times \mathbb{K}$. La matrice $T_{i,j}(\alpha)A$ est la matrice A dont on a ajouté la α fois la $j^{\text{ième}}$ ligne à la $i^{\text{ième}}$ ligne.

   Or on sait que, si on effectue l'opération élémentaire $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ sur les lignes d'une matrice, alors on revient à la matrice initiale en effectuant l'opération $L_i \longleftarrow L_i - \alpha L_j$ à nouveau. Nous en déduisons que $T_{i,j}(\alpha)$ est inversible d'inverse $T_{i,j}(-\alpha)$.