Feuille d'exercice n° 17

Matrices

I Calcul matriciel

Exercice 1. Calculer $A+B$, $A-2B$, AB et BA (si c'est possible) lorsque

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -7 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

3) $A = \begin{pmatrix} i & 2+3i \\ 1+i & -4i \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 7i \\ 4-5i & -i \end{pmatrix}$,

4) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$,

5) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{17}{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{11} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{13} & \frac{5}{4} \\ 2 & \frac{5}{12} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Calculer la transposée des matrices $A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 & -i \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 12 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, notons $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice (i,j) qui est égal à 1.

Calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$ pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle trace de la matrice $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1) Soit $(A,B,\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K}$. Montrer que $\mathrm{tr}(A+\lambda B) = \mathrm{tr}(A) + \lambda\,\mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.
3) Existe-t-il $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que $AB - BA = \mathrm{I}_n$?

Exercice 5. Calculer $P(A)$ lorsque

1) $P = X^2 - 5X$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2) $P = (X+1)(X-2)(X-5)$ et $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -6 & 7 & -3 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_n & 1-2x_n & 2x_n \\ x_n & -x_n & x_n+1 \end{pmatrix}$.
2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3) En déduire l'expression de M^n en fonction de n.

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$. En utilisant la formule du binôme, calculer M_α^n pour tous $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Considérons $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -10 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. En utilisant la formule du binôme, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra écrire $A = 3\mathrm{I}_3 + B$).

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
2) a) Montrer qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = x_n A + y_n \mathrm{I}_3$.
   b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression en fonction de x_n et y_n en fonction de n.
3) Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X - 3$. et retrouver le résultat.

II Matrices inversibles

Exercice 10. A l'aide d'un polynôme annulateur, montrer que les deux matrices de l'exercice 5 sont inversibles et calculer leur inverse. Vérifier le calcul par la méthode de Gauss Jordan.

Exercice 11. Considérons à nouveau la matrice A de l'exercice 9. Est-ce que A est inversible ? Si oui, exprimer son inverse en fonction de A et I_n. Vérifier le calcul par la méthode de Gauss-Jordan.

Exercice 12. En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels λ tels que la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_3$ n'est pas inversible.

Exercice 14. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0 = 1$, $v_0 = -2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n \end{cases}$$

1) Posons $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et calculer $P^{-1}AP$.
2) Calculer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3) En déduire u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=-1$, $u_1=1$, $u_2=2$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+3}=-3u_{n+2}+u_{n+1}+3u_n.$$

1) Posons $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-3&1&3\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\1&1&9\end{pmatrix}$. Montrer que $P\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et calculer $P^{-1}AP$.
2) Calculer A^n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.
3) En déduire u_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 16. Considérons $M=\begin{pmatrix}-3&-2&-7\\-1&0&-2\\2&2&5\end{pmatrix}$.

1) Montrer que $P=X^3-2X^2+X$ est un polynôme annulateur de M.
2) Est-ce que M est inversible ?
3) Calculer M^n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 17. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, posons $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$, $R(\theta)R(\theta')=R(\theta+\theta')$.
2) En déduire $R(\theta)^n$ en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$.
3) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Montrer que $R(\theta)$ est inversible et calculer $R(\theta)^{-1}$.

Exercice 18. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tous $\alpha\in\mathbb{K}^*$ et $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$, posons

$$M_{i,j}=\mathrm{I}_n-E_{i,i}-E_{j,j}+E_{i,j}+E_{j,i},\quad D_i(\alpha)=\mathrm{I}_n+(\alpha-1)E_{i,i}\quad\text{et}\quad T_{i,j}(\alpha)=\mathrm{I}_n+\alpha E_{i,j}.$$

Considérons une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) En quoi consiste le produit $M_{i,j}A$? En déduire que $M_{i,j}$ est inversible et calculer $M_{i,j}^{-1}$.
2) En quoi consiste le produit $D_i(\alpha)A$? En déduire que $D_i(\alpha)$ est inversible et calculer $D_i(\alpha)^{-1}$.
3) En quoi consiste le produit $T_{i,j}(\alpha)A$? En déduire que $T_{i,j}(\alpha)$ est inversible et calculer $T_{i,j}(\alpha)^{-1}$.

Exercice 19. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j\neq i}|a_{ij}|<|a_{ii}|$. Montrer que A est inversible (on pourra utiliser le critère du noyau).