Correction de quelques exercices de la feuille de TD 16

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

1) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{5y}{3} + \dfrac{3z}{2} = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{4y}{3} - \dfrac{11z}{6} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3y - 4z = -7 \\ 5x + 2z = 4 \\ -2x - y = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 5z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ + 4y - 6z = 8 \\ -x - 3y + 2z = -7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ 3x - y - z - 2t = 0 \\ -5x + 6z + 4t = 1 \\ 2x - 4y + 8z = -1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + y - z = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{3} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u = -3 \\ 3x + 5y + z - 2u = 2 \\ 2x + 8y + 5z + 6t - 7u = 5 \\ -4x - 2y + 3z + 6t - 3u = 1 \\ -5x - y + 3z + 3t + 6u = -4 \end{cases}$

Correction :

1) Pour simplifier les calculs, on peut déjà commencer par multiplier chaque ligne par 6. On obtient

$$(S) \iff \begin{cases} 6x + 3y - 3z = 15 \\ 2x + 10y + 9z = 14 \\ 2x - 8y - 11z = -3 \end{cases}$$

On applique ensuite la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} 6x + 3y - 3z = 15 & \\ 27y + 30z = 27 & L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ -27y - 30z = -24 & L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x + 3y - 3z = 15 & \\ 27y + 30z = 27 & \\ 0 = 3 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

La dernière ligne étant fausse, on en déduit qu'il n'y a pas de solutions.

2) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} 5x + 2z = 4 & \\ 3y - 4z = -7 & \\ -5y + 4z = 23 & L_3 \leftarrow 5L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x + 2z = 4 & \\ 3y - 4z = -7 & \\ -8z = 34 & L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2 \end{cases}$$

On obtient $z = -\dfrac{17}{4}$ puis $y = \dfrac{1}{3}(-7 + 4z) = -8$ et $x = \dfrac{1}{5}(4 - 2z) = \dfrac{5}{2}$.

3) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + 5z = 2 & \\ 2y - 3z = 4 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ 4y - 6z = 8 & \\ -6y + 9z = -12 & L_4 \leftarrow 2L_4 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 5z = 2 & \\ 2y - 3z = 4 & \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ 0 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont toujours vraies donc on peut les omettre. On obtient alors

$$(S) \iff \begin{cases} 2x \quad\quad + 5z = 2 \\ \quad\; 2y - 3z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - \frac{5}{2}z \\ y = 2 + \frac{3}{2}z \end{cases}$$

où on a choisi par exemple que z pour inconnue auxiliaire. L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{\left(1 - \frac{5}{2}z, 2 + \frac{3}{2}z, z\right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R}\right\}$$

4) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} x - 2y + 4z = \\ \quad 5y - 13z - 2t = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \quad - 10y + 26z + 4t = 6 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \\ \quad 0 = -3 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases}$$

La dernière ligne étant fausse, on en déduit qu'il n'y a pas de solutions.

5) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} \frac{x}{5} + y - z = \frac{1}{3} \\ \quad - 7y + \frac{11}{3}z = -\frac{11}{3} & L_2 \leftarrow 4L_2 - 5L_1 \end{cases}$$

On décide que z soit l'inconnu auxiliaire :

$$(S) \iff \begin{cases} x = 5\left(\frac{1}{3} - y + z\right) \\ y = \frac{11}{21}(1 + z) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{10}{21}(-4 + 5z) \\ y = \frac{11}{21}(1 + z) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\left(\frac{10}{21}(-4 + 5z), \frac{11}{21}(1 + z), z\right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R}\right\}$.

6) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u = -3 \\ \quad - 8y - z + 9t - 25u = 13 & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ \quad 2y + 4z + 9t - 14u = 8 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \quad 10y + 5z + 11u = -5 & L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \\ \quad 28y + 11z - 9t + 47u = -23 & L_5 \leftarrow 2L_5 + 5L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u = -3 \\ \quad - 8y - z + 9t - 25u = 13 \\ \quad 15z + 45t - 81u = 45 & L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2 \\ \quad 15z + 45t - 81u = 45 & L_4 \leftarrow 4L_4 + 5L_2 \\ \quad 15z + 45t - 81u = 45 & L_5 \leftarrow 2L_5 + 7L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u = -3 \\ \quad - 8y - z + 9t - 25u = 13 \\ \quad 15z + 45t - 81u = 45 \\ \quad 0 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ \quad 0 = 0 & L_5 \leftarrow L_5 - L_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

On peut omettre les deux dernières lignes qui sont toujours vraies. On choisit t et u pour inconnues auxiliaires. On obtient :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + 6y + z = -3 + 3t - 7u \\ \quad - 8y - z = 13 - 9t + 25u \\ \quad 15z = 45 - 45t + 81u \end{cases}$$

Ainsi

$$(S) \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(-3+3t-7u-6y-z) \\ y = \dfrac{-1}{8}(13-9t+25u+z) \\ z = \dfrac{1}{5}(15-15t+27u) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2-4t+\dfrac{16}{3}u \\ y = -2+3t-\dfrac{19}{5}u \\ z = 3-3t+\dfrac{27}{5}u \end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes linéaires suivants :

1) $\begin{cases} ix + 2y - z = -1 \\ 3x - 4iy = i \\ ix + 7y + 3iz = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -ix - y + z = 2-i \\ \quad + (1+i)y + 2z = 1-i \\ x - iy + (1-i)z = 2 \\ x + (1-2i)y - iz = i \end{cases}$

Correction :

1) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} ix + 2y - z = -5+2i \\ 2iy - 3iz = 3-15i & L_2 \leftarrow L_2 + 3iL_1 \\ 5y + (1+3i)z = 8-i & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ix + 2y - z = -5+2i \\ 2iy - 3iz = 3-15i \\ (17i-6)z = -13+91i & L_3 \leftarrow 2iL_3 - 5L_2 \end{cases}$$

On obtient alors $z = \dfrac{-13+91i}{17i-6} = 5-i$ puis $y = \dfrac{-i}{2}(3+15i+3iz) = \dfrac{-i}{2}(3+15i+3iz) = -3i$ et enfin $x = -i(-5+2i-2y+z) = 7$. Il n'y a qu'une seule solution : le triplet $(7, -3i, 5-i)$.

2) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} -ix - y + z = 2-i \\ (1+i)y + 2z = 1-i \\ (2+i)z = 2+i & L_3 \leftarrow iL_3 + L_1 \\ (1+i)y + 2z = 1-i & L_4 \leftarrow iL_4 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -ix - y + z = 2-i \\ (1+i)y + 2z = 1-i \\ (2+i)z = 2+i \\ 0 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -ix - y + z = 2-i \\ (1+i)y + 2z = 1-i \\ (2+i)z = 2+i \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La dernière ligne étant toujours vraie, on peut l'omettre. On obtient alors $z = 1$ puis $y = \dfrac{1}{1+i}(1-i-2z) = -1$ et $x = i(2-i+y-z) = 1$. Il n'y a qu'une seule solution : le triplet $(1, -1, 1)$.

Exercice 3.

1) On cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$. Un tel polynôme existe-il ? Est-il unique ?
2) Même question avec $P \in \mathbb{R}_4[X]$ vérifiant, pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, $P(k) = k$

Correction :

1) Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ si bien que P vérifie $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$ si et seulement si

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ -a + b - c + d = 1 \\ 3a + 2b + c = 1 \end{cases}$$

Notons (S) ce système et utilisons la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ \quad 2b + 2d = 2 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \quad - b - 2c - 3d = -2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ \quad 2b + 2d = 2 \\ \quad - 4c - 4d = -2 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{cases}$$

On choisit d pour inconnue auxiliaire et on obtient alors

$$(S) \iff \begin{cases} a = 1 - b - c - d \\ b = 1 - d \\ c = \frac{1}{2} - d \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{2} + d \\ b = 1 - d \\ c = \frac{1}{2} - d \end{cases}$$

Il existe donc une infinité de solutions : tous les 4-uplets de $\left\{ \left(-\frac{1}{2} + d, 1 - d, \frac{1}{2} - d, d \right) \,\middle|\, d \in \mathbb{R} \right\}$.

2) Si $P \in \mathbb{R}_4[X]$, alors il existe $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. Nous avons $P(k) = k$ pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$ si et seulement si $e = P(0) = 0$ et (a, b, c, d) est solution du système

$$(S) \quad \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 16a + 8b + 4c + 2d = 2 \\ 81a + 27b + 9c + 3d = 3 \\ 256a + 64b + 16c + 4d = 4 \end{cases}$$

On peut diviser la ligne k par k pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$ et on obtient alors

$$(S) \quad \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 1 \\ 64a + 16b + 4c + d = 1 \end{cases}$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ \quad - 4b - 6c - 7d = -7 & L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1 \\ \quad - 18b - 24c - 26d = -26 & L_3 \leftarrow L_3 - 27L_1 \\ \quad - 48b - 60c - 63d = -63 & L_4 \leftarrow L_4 - 64L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ \quad - 4b - 6c - 7d = -7 \\ \quad 6c + 11d = 11 & L_3 \leftarrow 2L_3 - 9L_2 \\ \quad 12c + 21d = 21 & L_4 \leftarrow L_4 - 12L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ \quad - 4b - 6c - 7d = -7 \\ \quad 6c + 11d = 11 \\ \quad d = 1 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{cases}$$

On trouve $d = 1$ puis $c = 0$, $b = 0$ et $a = 0$. Ainsi X est le seul polynôme vérifiant la condition.

Exercice 4. On cherche $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1,3\}, \qquad \frac{5x^2+2x-1}{x^4-3x^3-x^2+3x} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{x-3}.$$

Un tel quadruplet de réels existe-t-il ? Est-il unique ?

Correction : Soient $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1,3\}$. On met le membre de droite sur le même dénominateur :

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{x-3} &= \frac{\alpha(x^3-2x^2-3x)+\beta(x^3-3x^2-x+3)+\gamma(x^3-4x^2+3x)+\delta(x^3-x)}{x^4-3x^3-x^2+3x} \\
&= \frac{x^3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+x^2(-2\alpha-3\beta-4\gamma)+x(-3\alpha-\beta+3\gamma-\delta)+3\beta}{x^4-3x^3-x^2+3x} Y
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, le quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est solution si et seulement si il est solution du système

$$(S) \qquad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -2\alpha - 3\beta - 4\gamma = 5 \\ -3\alpha - \beta + 3\gamma - \delta = 2 \\ 3\beta = -1 \end{cases}$$

Utilisons la méthode du Pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
(S) \quad &\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -\beta - 2\gamma + 2\delta = 5 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 2\beta + 6\gamma + 2\delta = 2 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ 3\beta = -1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -\beta - 2\gamma + 2\delta = 5 \\ 2\gamma + 6\delta = 12 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ -6\gamma + 6\delta = 14 & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -\beta - 2\gamma + 2\delta = 5 \\ 2\gamma + 6\delta = 12 \\ 24\delta = 50 & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

On trouve une unique solution : $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{25}{12}\right)$.