Feuille d'exercice n° 16

Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

1) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{5y}{3} + \dfrac{3z}{2} = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{4y}{3} - \dfrac{11z}{6} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3y - 4z = -7 \\ 5x + 2z = 4 \\ -2x - y = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + \quad + 5z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ + 4y - 6z = 8 \\ -x - 3y + 2z = -7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ 3x - y - z - 2t = 0 \\ -5x + 6z + 4t = 1 \\ 2x - 4y + 8z = -1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + y - z = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{3} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u = -3 \\ 3x + 5y + z - 2u = 2 \\ 2x + 8y + 5z + 6t - 7u = 5 \\ -4x - 2y + 3z + 6t - 3u = 1 \\ -5x - y + 3z + 3t + 6u = -4 \end{cases}$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes linéaires suivants :

1) $\begin{cases} ix + 2y - z = -5+2i \\ 3x - 4iy = 9 \\ ix + 7y \quad 3iz = 3+i \end{cases}$

2) $\begin{cases} -ix - y + z = 2-i \\ + (1+i)y + 2z = 1-i \\ x - iy + (1-i)z = 2 \\ x + (1-2i)y - iz = i \end{cases}$

Exercice 3.

1) On cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$. Un tel polynôme existe-il ? Est-il unique ?
2) Même question avec $P \in \mathbb{R}_4[X]$ vérifiant, pour tout $k \in [\![0,4]\!]$, $P(k) = k$

Exercice 4. On cherche $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-1,0,1,3\}, \qquad \frac{5x^2+2x-1}{x^4-3x^3-x^2+3x} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{x-3}.$$

Un tel quadruplet de réels existe-t-il ? Est-il unique ?

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires à paramètres suivants :

1) $\begin{cases} mx + (2m+1)y = 4m+1 \\ (5m+3)x + (m-1)y = 5m-1 \end{cases}$

avec $m \in \mathbb{R}$.

2) $\begin{cases} \rho x + y + z = \theta \\ x + \rho y + z = \theta + 1 \\ x + y + \rho z = \theta + 2 \end{cases}$

avec $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

3) $\begin{cases} - y + 2z - 4t = 0 \\ -7x + 6y - 12z + 3t = \mu \\ 7x - 3y + 6z + 9t = -\mu \\ -x + y - 2z + t = 1 \end{cases}$

avec $\mu \in \mathbb{R}$.

4) $\begin{cases} \alpha x + \beta y + z = 1 \\ x + \alpha\beta y + z = \beta \\ x + \beta y + \alpha z = 1 \end{cases}$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système linéaire dépendant du paramètre $m \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = 1 \end{cases}$$