Correction de quelques exercices de la feuille de TD 15

I Degré, coefficient dominant, opérations algébriques

Exercice 3. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que

$$(P+Q)' = P' + Q', \quad (\lambda P)' = \lambda P', \quad (PQ)' = P'Q + QP', \quad (P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q).$$

Pour le dernier point, on pourra commencer par étudier la dérivée du polynôme Q^n avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction : Soient $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non constants (sinon c'est immédiat). Si $p < q$, on pose $a_{p+1} = \cdots = a_q = 0$ et, si $p > q$, on pose $b_{q+1} = \cdots = b_p = 0$.

- On a

$$(P+Q)' = \left(\sum_{k=0}^{p}(a_k + b_k)X^k\right)' = \sum_{k=1}^{p} k(a_k+b_k)X^{k-1} = \sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{p} k b_k X^{k-1} P' + Q'.$$

- On a

$$(\lambda P)' = \left(\sum_{k=0}^{p}(\lambda a_k)X^k\right)' = \sum_{k=1}^{p} k\lambda a_k X^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1} = \lambda P'.$$

- Pour tout $k \in [\![0, p+q]\!]$, posons $c_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. On a

$$(PQ)' = \left(\sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k\right)' = \sum_{k=1}^{p+q} k c_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} (k+1)c_{k+1}X^k.$$

On a aussi

$$P'Q = \sum_{k=0}^{p-1+q} \widetilde{c}_{k+1} X^k \qquad \text{avec, pour tout } k \in [\![0, p+q-1]\!], \qquad \widetilde{c}_k = \sum_{j=0}^{k}(j+1)a_{j+1}b_{k-j}$$

et

$$PQ' = \sum_{k=0}^{p+q-1} \widehat{c}_{k+1} X^k \qquad \text{avec, pour tout } k \in [\![0, p+q-1]\!], \qquad \widehat{c}_k = \sum_{j=0}^{k} a_j(k-j+1)b_{k-j+1}.$$

Par conséquent

$$P'Q + PQ' = \sum_{k=0}^{p+q-1} (\widetilde{c}_{k+1} + \widehat{c}_{k+1})X^k = (PQ)'$$

puisque, pour tout $k \in [\![0, p+q-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\widehat{c}_{k+1} + \widehat{c}_{k+1} &= \sum_{j=0}^{k}(j+1)a_{j+1}b_{k-j} + \sum_{j=0}^{k} a_j(k-j+1)b_{k-j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} j a_j b_{k-j+1} + \sum_{j=0}^{k}(k-j+1)a_j b_{k-j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{k}(j+k-j+1)a_j b_{k-j+1} + (k+1)a_{k+1}b_0 + (k+1)a_0 b_{k+1} = (k+1)c_{k+1}.
\end{aligned}$$

- Montrons par récurrence que $(Q^n)' = nQ'Q^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il n'y a rien à faire si $n = 1$. Supposons que cette propriété soit vrai au rang n pour un certain n fixé. On a alors

$$(Q^{n+1})' = (QQ^n)' = Q'Q^n + (Q^n)'Q = Q'Q^n + nQ'Q^{n-1}Q = (n+1)Q'Q^n.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$. D'où le résultat par récurrence.

Ensuite, on a

$$(P \circ Q)' = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k Q^k\right)' = \sum_{k=0}^{p} a_k (Q^k)' = \sum_{k=0}^{p} a_k k Q' Q^{k-1} = Q' \sum_{k=0}^{p} k a_k Q^{k-1} = Q' \times P \circ Q'.$$

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré n. Montrer que $Q = X^2P' - nXP \in \mathbb{K}_n[X]$.

Correction : Si $n = \deg(P) = 0$, alors $Q = 0 \in \mathbb{K}_0[X]$. Supposons que $n = \deg(P) \geqslant 1$. On a $\deg(X^2P') = \deg(X^2) + \deg(P') = 2 + n - 1 = n + 1$ et $\deg(-nXP) = \deg(XP) = \deg(X) + \deg(P) = n + 1$. Notons a_n le coefficient dominant de P. Le coefficient dominant de $-nXP$ est alors $-na_n$ et celui de X^2P' est na_n. Ainsi

$$\deg(Q) < \max(\deg(X^2P), \deg(-nXP)) = n + 1,$$

c'est-à-dire $\deg(Q) \leqslant n$. On a bien $Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 5. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(jX) = P(X)$, où $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^3)$.

Correction : On a $P(j^2X) = P(j(jX)) = P(jX) = P(X)$. Rappelons que $j^3 = 1$ et $j^4 = j$. Décomposant P selon que les indices de ses coefficients sont divisibles par 3 :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} a_{3k} X^{3k}}_{Q(X^3)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} a_{3k+1} X^{3k+1}}_{R(X)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} a_{3k+2} X^{3k+2}}_{S(X)}. \tag{1}$$

Par conséquent

$$P(X) = P(jX) = Q((jX)^3) + R(jX) + S(jX) = Q(X^2) + jR(X) + j^2S(X), \tag{2}$$

$$P(X) = P(j^2X) = Q((j^2X)^3) + R(j^2X) + S(j^2X) = Q(X^3) + j^2R(X) + jS(X). \tag{3}$$

En faisant $[(2) - (1)]/(j-1)$ et $[(3) - (1)]/(j-1)$, nous obtenons

$$R(X) + (j+1)S(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad (j+1)R(X) + S(X) = 0.$$

Ainsi

$$0 = (j+1)\big(R(X) + (j+1)S(X)\big) - \big((j+1)R(X) + S(X)\big)\big) = ((j+1)^2 - 1)S(X) = (j-1)S(X).$$

Par conséquent $S(X) = 0$ et donc $R(X) = 0$. Nous en déduisons que $P = Q(X^3)$.

II Division euclidienne et divisibilité

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne de

1) $X^7 - 3X^5 - 5X^3 + 1$ par $X - 2$,
2) $(X+2)^{2n} + (X+3)^n - 1$ par $X^2 + 5X + 6$,
3) $X^n - 4X + 2$ par $X(X+i)(X-2)$,
4) $(\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n$ par $X^2 + 1$,
5) $(X-2)^{2n} + X - 3$ par $(X-1)^2$.

Correction : Les quatre premières questions ont été traitées en cours. Traitons la cinquième :

Notons $A = (X-2)^{2n} + X - 3$ et $B = (X-1)^2$. Le théorème de la division euclidienne nous assure qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B) = 2$. Ainsi il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R = aX + b$. En évaluant A en 1, on obtient

$$a + b = R(1) = A(1) - B(1)Q(1) = (1-2)^n + 1 - 3 - 0 \cdot Q(0) = 1 + 1 - 3 = -1.$$

Puisque 1 est une racine double de B, il s'agit d'une racine de B'. On peut penser à dériver :

$$2n(X-2)^{2n-1} + 1 = A' = B'Q + BQ' + R' = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + a.$$

Ainsi $2n(1-2)^{2n-1} + 1 = A'(1) = 0 + 0 + a$ et donc $a = 1 - 2n$. Enfin $b = -1 - a = -1 + 2n - 1 = 2(n-1)$. Nous avons donc obtenu que $R = (1-2n)X + 2(n-1)$.

Exercice 9. 1) Montrer que, pour tout $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$, $1 + X + X^2$ divise $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$.

2) A quelle condition sur $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$?

Correction :

1) Fixons $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$. Notons $A = X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$ et $B = 1 + X + X^2$. Le théorème de la division euclidienne nous assure qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B) = 2$. Ainsi il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R = aX + b$.

   Rappel. *On note j le complexe $e^{2i\pi/3} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a $\overline{j} = j^2$, $j^3 = 1$ et $0 = 1 + j + j^2 = 1 + j + \overline{j}$. Les complexes j et $\overline{j}$ sont les racines de $1 + X + X^2$ dans $\mathbb{C}[X]$.*

   En évaluant en j, on obtient

   $$aj + b = R(j) = A(j) - B(j)Q(j) = j^{3n+2} + j^{3p+1} + j^{3q} = j^2 + j + 1 = 0.$$

   En évaluant en $\overline{j}$, on obtient

   $$a\overline{j} + b = R(\overline{j}) = A(\overline{j}) - B(\overline{j})Q(\overline{j}) = \overline{j}^{3n+2} + \overline{j}^{3p+1} + \overline{j}^{3q} = j + j^2 + 1 = 0.$$

   Nous en déduisons que $a = b = 0$. Autrement dit $(X^2 + X + 1) \,\big|\, (X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q})$.

2) Fixons $n \in \mathbb{N}$. Notons $A = (X+1)^n - X^n - 1$ et $B = 1 + X + X^2$. Si $n \leqslant 2$, alors le degré de A est inférieure ou égal à 1 donc B ne divise pas A. Supposons que $n \geqslant 3$. Le théorème de la division euclidienne nous assure qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B) = 2$. Ainsi il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R = aX + b$.

   En évaluant en j, on obtient

   $$aj + b = R(j) = A(j) - B(j)Q(j) = (j+1)^n - j^n - 1 = (-\overline{j})^n - j^n - 1.$$

   En évaluant en $\overline{j}$, on obtient

   $$a\overline{j} + b = R(\overline{j}) = A(\overline{j}) - B(\overline{j})Q(\overline{j}) = (\overline{j}+1)^n - \overline{j}^n - 1 = (-j)^n - \overline{j}^n - 1.$$

   Ainsi

   $$a(j - \overline{j}) = (-\overline{j})^n + j^n - (-j)^n - \overline{j}^n = \big(1 + (-1)^n\big)\big(\overline{j}^n - j^n\big).$$

   - Si n est un multiple de 3, alors $j^n = 1 = \overline{j}^n$ donc $a = 0$. Ensuite $b = (-1)^n \overline{j}^n - \overline{j}^n - 1 = (-1)^n - 2 \neq 0$. Dans ce cas $R \neq 0$.
   - Si $n - 1$ est un multiple de 3, alors $j^n = j$ et $\overline{j}^n = \overline{j}$. Ainsi $a = -(1 + (-1)^n)$. Si n est pair, alors $a \neq 0$ et donc $R \neq 0$. Si n est impair, alors $a = 0$ puis $b = (-1)^n \overline{j}^n - \overline{j}^n - 1 = -\overline{j} - j - 1 = 0$ donc $R = 0$.
   - Si $n - 2$ est un multiple de 3, alors $j^n = j^2 = \overline{j}$ et $\overline{j}^n = j$. Ainsi $a = (1 + (-1)^n)$. Si n est pair, alors $a \neq 0$ et donc $R \neq 0$. Si n est impair, alors $a = 0$ puis $b = (-1)^n \overline{j}^n - \overline{j}^n - 1 = -j - \overline{j} - 1 = 0$ donc $R = 0$.

Nous en déduisons que $(X^2+X+1) \,\big|\, (X+1)^n - X^n - 1$ si et seulement si n est impair mais pas divisible par 3.

Exercice 10. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ qui n'est pas le monôme X.

1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X)^k - X^k$ est divisible par $P(X) - X$.
2) Montrer que $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

Correction :

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$. Ainsi
$$P(X)^k - X^k = \big(P(X) - X\big) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} P(X)^{n-1-k} X^k}_{Q_k(X)}$$
et donc $P(X)^k - X^k$ est divisible par $P(X) - X$.

2) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. On a
$$\begin{aligned}
P(P(X)) - P(X) &= P(P(X)) - P(X) + P(X) - X \\
&= \sum_{k=0}^{p} a_k P(X)^k - \sum_{k=0}^{p} a_k X^k + P(X) - X \\
&= \sum_{k=0}^{p} a_k \big(P(X)^k - X^k\big) + P(X) - X \\
&= \sum_{k=0}^{p} a_k \big(P(X) - X\big)Q_k(X) + P(X) - X) = \big(P(X) - X\big)\left(1 + \sum_{k=0}^{p} a_k Q_k(X)\right)
\end{aligned}$$
On en déduit que $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

III Racines

Exercice 13. Montrer que -2 est racine de $P = X^4 + X^3 - 18X^2 - 52X - 40$. Quelle est sa multiplicité ? Déterminer les autres racines de P.

Correction : On calcule que $P(-2) = 0$. Ensuite on a $P' = 4X^3 + 3X^2 - 36X - 52$ et on calcule que $P'(-2) = 0$. Ainsi -2 est une racine multiple. On sait donc que P est divisible par $(X+2)^2$. En faisant par exemple une division euclidienne, on obtient que $P = (X+2)^2(X^2 - 3X - 10)$. Finalement on obtient $P = (X+2)^3(X-5)$. Ainsi -2 est une racine de multiplicité 3 et P admet aussi 5 pour racine simple.

Exercice 14. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$. Montrer que, si a est une racine de P, alors on peut trouver une racine b de P telles que $|b| > |a|$. En déduire P.

Correction : Si a est une racine de P, alors $P((a+1)^2) = P(a+1-1)P(a+1+1) = 0$ et $P((a-1)^2) = P(a-1-1)P(a-1+1) = 0$. Ainsi $(a+1)^2$ et $(a-1)^2$.

- Si $a > 0$, $|(a+1)^2| - |a| = a^2 + 2a + 1 - a = a^2 + a + 1 > 0$. On pose alors $b = (a+1)^2$.
- Si $a < 0$, $|(a-1)^2| - |a| = a^2 - 2a + 1 + a = a^2 + a + 1 > 0$. On pose alors $b = (a-1)^2$.

Par récurrence on obtient ainsi une suite strictement croissante de racines de P. Autrement dit P possède une infinité de racines. On a donc $P = 0$.

Nous en déduisons que $P = 0$ ou P n'admet pas de racines. Puisque $P \in \mathbb{C}[X]$, nous en déduisons que P est un polynôme constant. Si $P = c$ avec $c \in \mathbb{C}$, alors $c = c^2$ et donc $c \in \{0, 1\}$. Ainsi les seuls polynômes vérifiant cette propriété sont $P = 0$ et $P = 1$.

Exercice 17 (relations coefficients/racines). Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines (distinctes ou non) de P dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

et plus généralement que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$.

Correction : On sait que, dans $\mathbb{C}[X]$, $P = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$. On a $a_0 = P(0) = a_n \prod_{k=1}^{n} (0 - \lambda) = a_n (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$, d'où l'expression pour le produit des racines.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ la propriété « Si $S_n = \mu_1 + \cdots + \mu_n$ avec $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$, alors le polynôme $\prod_{k=1}^{n} (X - \mu_k)$ s'écrit sous la forme $X^n - S_n X^{n-1} + R_n$, avec $R_n \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$ (resp. $R_n = 0$) si $n \geqslant 2$ (resp. $n = 1$) ». Procédons par récurrence.

- Si $n = 1$, alors c'est immédiat.
- Supposons que $P(n)$ soit vraie au rang n pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} (X - \mu_k) &= (X - \mu_{n+1})(X^n - S_n X^{n-1} + R_n) \\ &= (X - \mu_{n+1})P = X^{n+1} - \underbrace{(\mu_{n+1} + S_n)}_{S_{n+1}} X^n + \underbrace{\mu_{n+1} S_n X^{n-1} + (X - \mu_{n+1}) R_n}_{= R_{n+1} \in \mathbb{K}_{n-1}[X]}.\end{aligned}$$

  Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat par récurrence.

Puisque $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$, on en déduit que $a_{n-1} = a_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. D'où l'expression pour le produit des racines.

IV Factorisation

Exercice 18. Factoriser (mettre sous forme de facteurs irréductibles) les polynômes

1) $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2) $X^3 - 1$, $X^4 - 1$ et $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3) $X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ (*on donnera deux méthodes dont une utilisant le polynôme* $(X^2 + 1)^2$).
4) $X^6 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ (*on pensera à la formule de factorisation de* $a^n - b^n$ *pour* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$).
5) $2X^5 - X^4 + 32X - 16$ dans $\mathbb{R}[X]$ (*on remarquera que* $1/2$ *est racine*).

Correction : Les quatre premières questions ont été traitées en cours. Traitons la cinquième :

On calcule que $P(1/2) = 0$. On peut donc factoriser $P = 2X^5 - X^4 + 32X - 16$ par $X - \frac{1}{2}$. En effectuant la division euclidienne de P par $X - \frac{1}{2}$, on obtient que $P = 2\Big(X - \frac{1}{2}\Big)(X^4 + 16)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le complexe z est une racine de $X^4 + 16$ si et seulement si $z^4 = -16$ si et seulement si il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = re^{i\theta}$ et $r^4 e^{4i\theta} = -16 = 16e^{i\pi}$ (puisque 0 n'est pas racine).

Ainsi z est racine de $X^4 + 16$ si et seulement si $z = 2e^{i\theta}$ avec $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right]$. Nous obtenons que $X^4 + 16$ admet quatre racines :

$$2e^{i\pi/4}, \qquad 2e^{3i\pi/4}, \qquad 2e^{5i\pi/4} = 2e^{-3i\pi/4} \qquad \text{et} \qquad 2e^{7i\pi/4} = 2e^{-i\pi/4}.$$

On regroupe des racines avec leur conjugués :

$$(X-2e^{i\pi/4})(X-2e^{-i\pi/4}) = X^2 - 2\,\mathfrak{Re}(2e^{i\pi/4}) + |2e^{-i\pi/4}|^2 = X^2 - 2\sqrt{2} + 4$$
$$(X-2e^{3i\pi/4})(X-2e^{-3i\pi/4}) = X^2 - 2\,\mathfrak{Re}(2e^{3i\pi/4}) + |2e^{3i\pi/4}|^2 = X^2 + 2\sqrt{2} + 4.$$

Finalement
$$2X^5 - X^4 + 32X - 16 = 2\Big(X - \frac{1}{2}\Big)(X^2 - 2\sqrt{2}+4)(X^2+2\sqrt{2}+4).$$

V Polynômes avec Scilab

Exercice 24. Écrire un programme en `Scilab` qui :

- prend en entrée un réel a et un polynôme P implémenté en Scilab (sous forme de vecteur contenant les coefficients de P rangés dans l'ordre croissant des indices).
- effectue la division euclidienne de P par $X-a$, c'est-à-dire qu'il calcule l'unique polynôme Q et l'unique réel r tels que $P=(X-a)Q+r$,
- affiche le polynôme Q et le nombre r.

Indication : en posant $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ *et* $Q = \sum_{k=0}^{n-1} q_k X^k$, *montrer que* $q_{n-1} = p_n$, *que pour tout* $k \in [\![1, n-1]\!]$, $q_{k-1} = aq_k + p_k$ *et que* $r = p_0 + aq_0$.

Correction : On a

$$\begin{aligned} P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k = (X-a)\sum_{k=0}^{n-1} q_k X^k + r &= \sum_{k=0}^{n-1} q_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} aq_k X^k + r \\ &= \sum_{j=1}^{n} q_{j-1} X^j - \sum_{k=0}^{n-1} aq_k X^k + r \\ &= q_{n-1}X^n + \sum_{k=1}^{n-1}(q_{k-1} - aq_k)X^k - aq_0 + r. \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients, on en déduit que $p_0 = r - aq_0$, $p_n = q_{n-1}$ et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $p_{k-1} = q_{k-1} - aq_k$. D'où l'algorithme :

```
v=input('Entrez le polynôme sous forme de vecteur :');
a=input('Entrez un réel a :');
n=length(v)-1;
w=[v(n+1)]; q=v(n+1);
for  k=1:n
     q=v(n+1-k)+a*q;
     w=[q,w];//Cela permet d'ajouter la valeur de q au début du vecteur w
end
r=v(1)+a*q; Q=poly(w,'X','c');
disp('Le quotient est le polynôme est Q='+string(Q)+' et le reste r='+string(Q)+'.')
```