Feuille d'exercice n° 15

Polynômes réels ou complexes

I Degré, coefficient dominant, opérations algébriques

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1) $P = (X-1)^n - (X+7)^n$,
2) $P = (X+2)^n + (1-X)^n$,
3) $P = \displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} (X^k + X + 1)$,
4) $P = \displaystyle\prod_{m=1}^{n} (3X^2 + 2mX + 1)$,
5) $P = \displaystyle\prod_{\ell=1}^{n} (\ell X^4 + 2i)^{\ell^2}$.

Exercice 2. Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant :

1) Le degré de la somme de deux polynômes est le plus grand des degrés.
2) Le degré du produit de deux polynômes est la somme de leurs degrés.
3) Si $n \in \mathbb{N}$, $(P,Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors $\alpha P + \beta Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
4) Si $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que

$$(P+Q)' = P' + Q', \quad (\lambda P)' = \lambda P', \quad (PQ)' = P'Q + QP', \quad (P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q).$$

Pour le dernier point, on pourra commencer par étudier la dérivée du polynôme Q^n avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré n. Montrer que $Q = X^2 P' - nXP \in \mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 5. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(jX) = P(X)$, où $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^3)$.

Exercice 6. Déterminer l'ensemble de polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

II Division euclidienne et divisibilité

Exercice 7. Effectuer la division euclidienne de

1) $X^4 - 5X^3 + 3X^2 - X + 2$ par $B = X^2 + X - 3$.
2) $iX^3 + 3X - 1 + 2i$ par $B = X + 7i - 3$.
3) $X^5 + 1$ par $X^2 - 2X$.

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne de

1) $X^7 - 3X^5 - 5X^3 + 1$ par $X - 2$,
2) $(X+2)^{2n} + (X+3)^n - 1$ par $X^2 + 5X + 6$,
3) $X^n - 4X + 2$ par $X(X+i)(X-2)$,
4) $(\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n$ par $X^2 + 1$,
5) $(X-2)^{2n} + X - 3$ par $(X-1)^2$.

Exercice 9. 1) Montrer que, pour tout $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$, $1 + X + X^2$ divise $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$.

2) A quelle condition sur $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 10. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ qui n'est pas le monôme X.

1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X)^k - X^k$ est divisible par $P(X) - X$.
2) Montrer que $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

III Racines

Exercice 11. Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant :

1) Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré impair, alors P possède au moins une racine réel.
2) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors P possède n racines distinctes.
3) Le polynôme $(X+i)^2(X-4)(X+\sqrt{2})^2$ est de degré 5 et possède trois racines distinctes.
4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\cos(n\pi/2)) = 0$. Alors $P = 0$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $1 + X + X^n \in \mathbb{R}[X]$ n'a que des racines simples.

Exercice 13. Montrer que -2 est racine de $P = X^4 + X^3 - 18X^2 - 52X - 40$. Quelle est sa multiplicité ? Déterminer les autres racines de P.

Exercice 14. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$. Montrer que, si a est une racine de P, alors on peut trouver une racine b de P telles que $|b| > |a|$. En déduire P.

Exercice 15. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Que dire d'un polynôme à coefficient réels qui est T-périodique ?

Exercice 16. Existe-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \overline{z}$?

Exercice 17 (relations coefficients/racines). Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines (distinctes ou non) de P dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

et plus généralement que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$.

Exercice 18 (D'après l'oral de ESCP). Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P' divise P.

1) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, $P = \dfrac{1}{n}(X - \alpha)P'$.
2) Établir une relation de récurrence entre les coefficients de P.
3) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur P.

Exercice 19. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ ayant exactement n racines réelles distinctes. Combien P' possède-il de racines réelles ?

IV Factorisation

Exercice 20. Factoriser (mettre sous forme de facteurs irréductibles) les polynômes

1) $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2) $X^3 - 1$, $X^4 - 1$ et $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3) $X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ (*on donnera deux méthodes dont une utilisant le polynôme* $(X^2+1)^2$).
4) $X^6 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ (*on pensera à la formule de factorisation de* $a^n - b^n$ *pour* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$).
5) $2X^5 - X^4 + 32X - 16$ dans $\mathbb{R}[X]$ (*on remarquera que* $1/2$ *est racine*).

Exercice 21. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(k) = \dfrac{1}{k}$. Calculer $P(n+2)$.

Exercice 22. Soient $n \geqslant 2$ un entier naturel. Posons $P_n = (X+1)^n - 1$.

1) Déterminer les racines de P_n dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2) Calculer de deux façons le coefficient du terme d'indice 1 de P_n.
3) En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 23 (Polynôme de Lagrange). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

1) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer un polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant
   — $L_i(a_i) = 1$,
   — pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $j \neq i$, $L_i(a_j) = 0$.
2) Soient $b_1, \ldots, b_n$ des réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L(a_j) = b_j$.

V Polynômes avec Scilab

Quelques rappels du chapitre 1 d'informatique : Scilab permet de définir et d'effectuer des opérations algébriques sur les polynômes. Si v est un vecteur Scilab non vide, alors la commande `poly(v,'X','c')` *définit le polynôme dont le nom de l'indéterminée du polynôme est* `X` *et dont les coefficients sont les coordonnées du vecteur* `v` *(dans l'ordre croissant ; le coefficient constant étant la première coordonnée du vecteur). On peut stocker un polynôme dans une variable. On peut ensuite effectuer des opérations algébriques grâce aux symboles* `+`, `-`, `*` *et* $\wedge$.

Si `P` *est un polynôme, alors* `degree(P)` *renvoie le degré du polynôme* `P` *et* `coeff(P)` *renvoie un vecteur dont les coordonnées sont les coefficients de* `P`.

Nous avons déjà vu l'algorithme de Hörner en TP.

Exercice 24. Écrire un programme en `Scilab` qui :

— prend en entrée un réel a et un polynôme P implémenté en Scilab (sous forme de vecteur contenant les coefficients de P rangés dans l'ordre croissant des indices).
— effectue la division euclidienne de P par $X - a$, c'est-à-dire qu'il calcule l'unique polynôme Q et l'unique réel r tels que $P = (X-a)Q + r$,
— affiche le polynôme Q et le nombre r.

Indication : en posant $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ *et* $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q_k X^k$, *montrer que* $q_{n-1} = p_n$, *que pour tout* $k \in [\![1, n-1]\!]$, $q_{k-1} = aq_k + p_k$ *et que* $r = p_0 + aq_0$.