Correction de quelques exercices de la feuille de TD 14

I Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{1-4v}\,dv$,

2) $\displaystyle\int_{\ln(4)}^{\ln(2)} \left(3e^{-\frac{x}{4}}+1\right)^2 dx$,

3) $\displaystyle\int_1^2 e^u\left(\frac{1}{u}+\ln(u)\right) du$,

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{5}{\cos^2(3z)}\,dz$,

5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\cos^5(y)+4\cos^3(y)-7\right)\sin(y)\,dy$.

6) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{5+3t^2}\,dt$.

Correction : Toutes ont été calculées en cours sauf la deuxième. La fonction $x \longmapsto \left(3e^{-\frac{x}{4}}+1\right)^2$ est continue sur $[\ln(2),\ln(4)]$ donc l'intégrale a bien un sens. On développe :

$$\begin{aligned}
\int_{\ln(4)}^{\ln(2)} \left(3e^{-\frac{x}{4}}+1\right)^2 dx &= \int_{\ln(4)}^{\ln(2)} (9e^{-\frac{x}{2}}+6e^{-\frac{x}{4}}+1)\,dx \\
&= \left[-18e^{-\frac{x}{2}}-24e^{-\frac{x}{4}}+x\right]_{\ln(4)}^{\ln(2)} \\
&= -18e^{-\frac{\ln(2)}{2}}-24e^{-\frac{\ln(2)}{4}}+\ln(2)+18e^{-\frac{\ln(4)}{2}}+24e^{-\frac{\ln(4)}{4}}-\ln(4) \\
&= -\frac{18}{2^{1/2}}-\frac{24}{2^{1/4}}+\ln(2)+\frac{18}{4^{1/2}}+\frac{24}{4^{1/4}}-\ln(4) \\
&= 9+\frac{6}{\sqrt{2}}-\frac{24}{\sqrt[4]{2}}-\ln(2).
\end{aligned}$$

Exercice 2. Donner une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser :

1) $x \mapsto \dfrac{2x^4}{3}-\dfrac{x}{5}+1$,

2) $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$,

3) $x \mapsto 1-\sin(\pi-2x)$,

4) $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{2x}$,

5) $x \mapsto \dfrac{1+x}{(5+2x+x^2)^{2017}}$,

6) $x \mapsto \exp(x+e^x)$,

7) $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+\ln^2(x))}$,

8) $x \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$,

9) $x \mapsto 2^x$.

Correction : L'objectif ici est de trouver des primitives en reconnaissant des dérivées de composées de fonctions usuelles (sans utiliser ni IPP ni changement de variables).

1) Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2x^4}{3}-\dfrac{x}{5}+1$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{2x^5}{15}-\dfrac{x^2}{10}+x$.

2) Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x}$ sur $]-\infty,-1[$ ou sur $]-1,+\infty[$ est $x \longmapsto x-\ln(|1+x|)$.

3) Une primitive de $x \longmapsto 1-\sin(\pi-2x)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto x-\dfrac{\cos(\pi-2x)}{2}$.

4) Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{2x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \dfrac{(\ln(x))^2}{4}$.

5) Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1+x}{(5+2x+x^2)^{2017}}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{-1}{4032(5+2x+x^2)^{2016}}$.

6) Une primitive de $x \longmapsto \exp(x+e^x)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \exp(e^x)$.

7) Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x(1+\ln^2(x))}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \mathrm{Arctan}(\ln(x))$,

8) Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto -2\cos(\sqrt{x})$,

9) Une primitive de $x \longmapsto 2^x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{2^x}{\ln(2)}$,

Exercice 3 (primitives et décomposition en éléments simples).

1) Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3,0,3\}, \qquad \frac{9}{x(x^2-9)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x+3}.$$

En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{9}{x(x^2-9)}$ (sur un intervalle à préciser).

2) Montrer qu'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{ax+b}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}.$$

En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ (sur un intervalle à préciser).

Correction :

1) Traitée en cours.

2) Pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\begin{aligned}\frac{ax+b}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2} &= \frac{ax+b+(cx+d)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} \\ &= \frac{cx^3+dx^2+(a+2c+2d)x+b+2c+2d}{(x^2+2x+2)^2}\end{aligned}$$

Ainsi (a,b,c,d) est solution si et seulement si $c=0$, $d=1$, $a+2c+2d=1$ et $b+2c+2d=1$. Ainsi $(a,b,c,d) = (-1,-1,0,1)$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-1}{2}\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{1}{1+(1+x)^2}.$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ admet donc $x \longmapsto \dfrac{1}{2(x^2+2x+2)} + \operatorname{Arctan}(1+x)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$1)\ \int_0^1 a^3 e^{-\frac{a^2}{2}}\,da, \qquad 2)\ \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\xi\ln(\xi)}{(1+\xi^2)^2}\,d\xi, \qquad 3)\ \int_1^e \ln^2(w)\,dw, \qquad 4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)e^{\cos(t)}\,dt.$$

Correction :

1) Traitée en cours.

2) Traitée en cours mais voici quand même la correction : faisons une IPP avec les fonctions $u : \xi \longmapsto \ln(\xi)$ et $v : \xi \longmapsto \dfrac{-1}{2(1+\xi^2)}$ de classe C^1 sur $[1/2, 2]$. On a $u' : \xi \longmapsto \dfrac{1}{\xi}$ et $v : \xi \longmapsto \dfrac{\xi}{(1+\xi^2)}$ donc

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^2 \frac{\xi\ln(\xi)}{(1+\xi^2)^2}\,d\xi &= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{-\ln(\xi)}{1+\xi^2}\right]_{1/2}^2 + \int_{1/2}^2 \frac{d\xi}{\xi(1+\xi^2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(2)}{5} + \frac{4\ln(1/2)}{5} + \int_{1/2}^2 \frac{d\xi}{\xi(1+\xi^2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\ln(2) + \int_{1/2}^2 \frac{d\xi}{\xi(1+\xi^2)}\right).\end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{2} \frac{d\xi}{\xi(1+\xi^2)} = \int_{1/2}^{2} \frac{1+\xi^2-\xi^2}{\xi(1+\xi^2)}\, d\xi &= \int_{1/2}^{2} \frac{d\xi}{\xi} - \int_{1/2}^{2} \frac{\xi}{1+\xi^2}\, d\xi \\ &= [\ln(\xi)]_{1/2}^{2} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+\xi^2)\right]_{1/2}^{2} \\ &= \ln(2) - \ln(1/2) - \frac{\ln(5)}{2} + \frac{\ln(5/4)}{2} \\ &= 2\ln(2) - \frac{\ln(4)}{2} = \ln(2).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{1/2}^{2} \frac{\xi \ln(\xi)}{(1+\xi^2)^2}\, d\xi = \frac{1}{2}\left(-\ln(2)+\ln(2)\right) = 0.$$

3) Faisons une IPP avec les fonctions $u : w \longmapsto \ln(w)$ et $v : w \longmapsto w\ln(w) - w$ de classe C^1 sur $[1, e]$. On a $u' : w \longmapsto \dfrac{1}{w}$ et $v : w \longmapsto \ln(w)$ donc

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln^2(w)\, dw &= [\ln(w)(w\ln(w)-w)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{w}(w\ln(w)-w)\, dw \\ &= \ln(e)(e\ln(e)-e) - 0 - \int_1^e (\ln(w)-1)\, dw \\ &= -\left[w\ln(w)-2w\right]_1^e \\ &= -(e\ln(e) - 2e - 0 + 2) = e-2.\end{aligned}$$

4) L'intégrande est continue sur $[0, \pi/2]$ donc l'intégrale est bien définie. On a

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2t)e^{\cos(t)}\, dt = \int_0^{\pi/2} 2\cos(t)\sin(t)e^{\cos(t)}\, dt.$$

Faisons une IPP avec les fonctions $u : t \longmapsto 2\cos(t)$ et $v : t \longmapsto -e^{\cos(t)}$ de classe C^1 sur $[1, e]$. On a $u' : t \longmapsto -2\sin(t)$ et $v : t \longmapsto \sin(t)e^{\cos(t)}$ donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} 2\cos(t)\sin(t)e^{\cos(t)}\, dt &= \left[-2\cos(t)e^{\cos(t)}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\sin(t)e^{\cos(t)}\, dt \\ &= 0 + 2e - \left[-2e^{\cos(t)}\right]_0^{\pi/2} \\ &= 2e - (-2+2e) = 2.\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2t)e^{\cos(t)}\, dt = 2.$

Exercice 5. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.

1) $x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$,
2) $x \mapsto \cos(\ln(x))$ (*On pourra faire deux IPP consécutives*),
3) $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,
4) Arccos, la fonction réciproque de $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

Correction :

1) La fonction $t \longmapsto \dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc y admet une primitive. Faisons une IPP avec les fonctions $u : t \longmapsto \sqrt{1+t^2}$ et $v : t \longmapsto t^2$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On a $u' : 2t \longmapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $v : t \longmapsto 2t$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\, dt &= \left[t^2\sqrt{1+t^2}\right]_0^x - \int_0^x 2t\sqrt{1+t^2}\, dt \\ &= x^2\sqrt{1+x^2} - \left[\frac{2}{3}(1+t^2)^{3/2}\right]_0^x \\ &= x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi une primitive de $t \longmapsto \dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \longmapsto t^2\sqrt{1+t^2} - \dfrac{2}{3}(1+t^2)^{3/2}$.

2) La fonction $t \longmapsto \cos(\ln(t))$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc y admet une primitive. Faisons une IPP avec les fonctions $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto \cos(\ln(t))$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $u' : t \longmapsto 1$ et $v' : t \longmapsto \dfrac{-\sin(\ln(t))}{t}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_1^x \cos(\ln(t))\,dt = [t\cos(\ln(t))]_1^x - \int_1^x t\,\frac{-\sin(\ln(t))}{t}\,dt = x\cos(\ln(x)) - 1 + \int_1^x \sin(\ln(t))\,dt.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, faisons une IPP avec les fonctions $\varphi : t \longmapsto t$ et $\psi : t \longmapsto \sin(\ln(t))$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\varphi' : t \longmapsto 1$ et $\psi' : t \longmapsto \dfrac{\cos(\ln(t))}{t}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_1^x \sin(\ln(t))\,dt = [t\sin(\ln(t))]_1^x - \int_1^x t\,\frac{\cos(\ln(t))}{t}\,dt = x\sin(\ln(x)) - \int_1^x \cos(\ln(t))\,dt.$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \int_1^x \cos(\ln(t))\,dt = x\cos(\ln(x)) - 1 + x\sin(\ln(x)) - \int_1^x \cos(\ln(t))\,dt.$$

Ainsi une primitive de $t \longmapsto \cos(\ln(t))$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $t \longmapsto \dfrac{t}{2}\Big(\cos(\ln(t)) + \sin(\ln(t))\Big)$.

3) Si $\alpha = -1$, alors une primitive de $t \longmapsto t^\alpha \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $t \longmapsto \dfrac{\ln^2(t)}{2}$. Supposons que $\alpha \neq -1$. La fonction $t \longmapsto t^\alpha \ln(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc y admet une primitive. Faisons une IPP avec les fonctions $u : t \longmapsto \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $v : t \longmapsto \ln(t)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $u' : t \longmapsto t^\alpha$ et $v' : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \int_1^x t^\alpha \ln(t)\,dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}\ln(t)}{\alpha+1}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^\alpha}{\alpha+1}\,dt = \frac{x^{\alpha+1}\ln(x)}{\alpha+1} - \left[\frac{t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\right]_1^x$$

Ainsi une primitive de $t \longmapsto t^\alpha \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $t \longmapsto \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln(t) - \dfrac{1}{\alpha+1}\right)$.

4) On a vu dans la feuille de TD n° 13 que Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. En particulier Arccos est continue donc admet une primitive sur $]-1,1[$. Faisons une IPP avec les fonctions $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto \mathrm{Arccos}(t)$ de classe C^1 sur $]-1,1[$. On a $u' : t \longmapsto 1$ et $v' : t \longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{Arccos}(t)\,dt &= [t\,\mathrm{Arccos}(t)]_0^x - \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = x\,\mathrm{Arccos}(x) - \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^x \\ &= x\,\mathrm{Arccos}(x) - \sqrt{1-x^2} + 1.\end{aligned}$$

Ainsi une primitive de Arccos sur $]-1,1[$ est $t \longmapsto t\,\mathrm{Arccos}(t) - \sqrt{1-t^2}$.

Exercice 7. Avec un changement de variables, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.

$$1)\ x \mapsto e^{\sqrt{x}}, \qquad 2)\ x \mapsto \frac{5x^2}{\sqrt{2-3x}}, \qquad 3)\ x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^3}}{x}, \qquad 4)\ x \mapsto \tan^4(x).$$

On fera les changements de variables $t = e^{\sqrt{x}}$ pour le 1), $t = \sqrt{1+x^3}$ pour le 3) et $t = \tan(x)$ pour le 4) (et on pourra utiliser le fait que, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $z^4 = 1 + (z^2-1)(z^2+1)$).

Correction : Elles ont toutes été déterminées en cours dans la deuxième. La fonction $x \longmapsto \dfrac{5x^2}{\sqrt{2-3x}}$ est continue sur $]-\infty, 2/3[$. Faisons le changement de variable $t = 2-3x$ (avec $dt = -3dx$) : pour tout

$y \in]-\infty, 2/3[$,

$$\int_0^y \frac{5x^2}{\sqrt{2-3x}}\,dx = \int_2^{2-3y} \frac{5(\frac{2-t}{3})^2}{\sqrt{t}}\,\frac{dt}{-3} = \frac{5}{27}\int_{2-3y}^2 \frac{4-4t+t^2}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{5}{27}\int_{2-3y}^2 4t^{-1/2} - 4t^{1/2} + t^{3/2}\,dt$$
$$= \frac{5}{27}\left[8t^{1/2} - \frac{8}{3}t^{3/2} + \frac{2}{5}t^{5/2}\right]_{2-3y}^2$$

Ainsi une primitive de $x \longmapsto \dfrac{5x^2}{\sqrt{2-3x}}$ sur $]-\infty, 2/3[$ est $x \longmapsto -\dfrac{10}{27}\left(4(2-3x)^{1/2} - \dfrac{4}{3}(2-3x)^{3/2} + \dfrac{1}{5}(2-3x)^{5/2}\right)$.
Après simplification cette dernière primitive est encore égale à $x \longmapsto -\dfrac{-2}{81}(27x^2+24x+32)\sqrt{2-3x}$.

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

$$1)\ \int_{-3}^4 \frac{|x-1|}{|x|+1}\,dx, \qquad 2)\ \int_{-1}^1 e^{-|u|}\,du, \qquad 3)\ \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}\,dx, \qquad 4)\ \int_{4/e}^{2e} \frac{\lfloor y \rfloor}{y}\,dy.$$

Correction :

1) La fonction $x \longmapsto \dfrac{|x+1|}{|x|+1}$ est continue sur $[-3,4]$ donc l'intégrale a bien un sens. Son expression diffère selon l'intervalle considéré donc nous allons utiliser la relation de Chasles :
$$\int_{-3}^4 \frac{|x-1|}{|x|+1}\,dx = \int_{-3}^0 \frac{-(x-1)}{-x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{-(x-1)}{x+1}\,dx + \int_1^4 \frac{x-1}{x+1}\,dx = 3 + [F(x)]_0^1 - [F(x)]_1^4,$$
où F est une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ sur $[0,4]$. Pour tout $x \in [0,4]$, on a $f(x) = \dfrac{-1-x+2}{1+x} = -1 + \dfrac{2}{1+x}$ donc on peut considérer $F : x \longmapsto -x + 2\ln(1+x)$. Nous en déduisons que
$$\int_{-3}^4 \frac{|x-1|}{|x|+1}\,dx = 3 + 2F(1) - F(0) - F(4) = 5 + 4\ln(2) - 2\ln(5).$$

2) L'intégrande est paire est continue sur $[-1,1]$ donc
$$\int_{-1}^1 e^{-|u|}\,du = 2\int_0^1 e^{-|u|}\,du = 2\int_0^1 e^{-u}\,du = 2(1-e^{-1}).$$

3) On remarque que l'intégrande est impaire et continue sur $[-\pi/3, \pi/3]$ donc l'intégrale est nulle.

4) Traitée en cours.

II Utilisation des propriétés de l'intégrale

Exercice 9. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$.

Correction : Supposons que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$.

- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$ et donc $\displaystyle\int_a^b (|f(t)| - f(t))\,dt = 0$. Puisque $a \leqslant b$ et $|f| - f$ est une fonction continue et positive sur $[a,b]$, nous obtenons qu'elle est nulle sur $[a,b]$, c'est-à-dire $f = |f|$, c'est-à-dire f est positive sur $[a,b]$.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$ et donc $\displaystyle\int_a^b (|f(t)| + f(t))\,dt = 0$. Puisque $a \leqslant b$ et $|f| + f$ est une fonction continue et positive sur $[a,b]$, nous obtenons qu'elle est nulle sur $[a,b]$, c'est-à-dire $f = -|f|$, c'est-à-dire f est négative sur $[a,b]$.

Réciproquement si f ne change pas de signe sur $[a,b]$, alors l'égalité $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$ est immédiate.

Exercice 11. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1) Prolonger $g : x \longmapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ en une fonction continue sur tout $\mathbb{R}$.
2) Soit $T > 0$. Supposons de plus que f est T-périodique.
   a) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.
   b) En déduire que, pour tous $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = \frac{nT}{x}g(T) + \frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)\,dt$.
   c) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
   d) Montrer que g admet $g(T)$ pour limite en $+\infty$.

Correction :

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est admet une primitive F sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{F(x)-F(0)}{x}$. Comme F est continue sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que g est continue sur $\mathbb{R}^*$. Enfin, comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = F'(0) = f(0)$. Ainsi on prolonge g par continuité en 0 en posant $g(0) = f(0)$.
2) Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après la relation de Chasles
$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f(t)\,dt.$$
En faisant le changement de variable $x = t - T$ (avec $dx = dt$) dans la dernière intégrale, on obtient
$$\int_T^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^a f(x+T)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(x)\,dx.$$
On retrouve alors $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.
3) Fixons $x \in \mathbb{R}^*$ et procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, alors la formule est simplement la définition de $g(x)$. Supposons que la formule soit vraie au rang n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Nous avons
$$\begin{aligned}\frac{(n+1)T}{x}g(T) + \frac{1}{x}\int_{(n+1)T}^x f(t)\,dt &= \frac{nT}{x}g(T) + \frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_{(n+1)T}^{nT} f(t)\,dt + \frac{Tg(T)}{x}\\ &= g(x) - \frac{1}{x}\int_{nT}^{nT+T} f(t)\,dt + \frac{Tg(T)}{x},\end{aligned}$$
d'après l'hypothèse de récurrence. En appliquant la question précédente avec $a = nT$, on obtient :
$$\frac{(n+1)T}{x}g(T)+\frac{1}{x}\int_{(n+1)T}^x f(t)\,dt = g(x)-\frac{1}{x}\int_0^T f(t)\,dt+\frac{Tg(T)}{x} = g(x)-\frac{1}{x}Tg(T)+\frac{Tg(T)}{x} = g(x).$$
D'où la formule par récurrence.
4) La fonction f est continue sur le segment $[0,T]$ donc elle est bornée sur $[0,T]$ par un certain réel $M > 0$. Puisqu'elle est T-périodique, on en déduit qu'elle est bornée par M sur $\mathbb{R}$ tout entier.
5) Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $nT \leqslant x$, l'inégalité triangulaire entraîne que
$$\begin{aligned}|g(x) - g(T)| = \left|\frac{nT-x}{x}g(T) + \frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)\,dt\right| &\leqslant \frac{|nT-x|}{x}g(T) + \frac{1}{x}\int_{nT}^x |f(t)|\,dt\\ &\leqslant \frac{(x-nT)}{x}g(T) + \frac{(x-nT)M}{x}.\end{aligned}$$
On peut choisir par exemple $n = \lfloor \frac{x-1}{T} \rfloor$ de telle sorte que $nT + 1 \leqslant x \leqslant (n+1)T + 1$ et donc $1 \leqslant x - nT \leqslant T + 1$. On obtient alors
$$|g(x) - g(T)| \leqslant \frac{(T+1)(g(T)+M))}{x}.$$
Il suffit alors de faire tendre x vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, pour obtenir que g admet $g(T)$ pour limite en $+\infty$.

III Suites et fonctions définies par une intégrale

Exercice 14. Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=0$. Montrer que

$$\forall t\in[a,b],\qquad \int_a^t f(u)\,du+\int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,du = tf(t).$$

Correction : Puisque f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a,b]$, le théorème de la bijection entraîne que f est une bijection sur $[a,b]$ et que f^{-1} est continue sur $[a,b]$. Ainsi toutes les intégrales sont bien définies. Soient F et G des primitives de f et f^{-1} respectivement sur $[a,b]$. La fonction

$$\varphi : t\longmapsto \int_a^t f(u)\,du+\int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,du - tf(t) = F(t)-F(a)+G(f(t))-G(0)-tf(t)$$

est dérivable sur $]a,b[$ et,

$$\forall t\in\,]a,b[,\quad \varphi'(t)=F'(t)+f'(t)G'(f(t))-f(t)+tf'(t)=f(t)+f'(t)f^{-1}(f(t))-f(t)+tf'(t)=0.$$

Ainsi φ est constante sur $]a,b[$. Par continuité, elle est donc constante sur $[a,b]$. Enfin $f(a)=0$ donc $\varphi(a)=0$ et donc f est nulle sur $[a,b]$. D'où l'égalité.

Exercice 15. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

1) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, écrire $J_n=\ln(2)-I_n$ sous forme intégrale et montrer que $0\leqslant J_n\leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction :

1) Pour tous $t\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, on a $t^{n+1}\leqslant t^n$ donc $\dfrac{1}{1+t+t^n}\geqslant\dfrac{1}{1+t+t^{n+1}}\leqslant 1$. En intégrant, nous obtenons que $I_n\leqslant I_{n+1}\leqslant 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge.
2) On a $\ln(2)=\ln(1+1)-\ln(1+0)=\int_0^1\dfrac{dt}{1+t}$ si bien que
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad J_n=\int_0^1\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1+t+t^n}\right)dt=\int_0^1\frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\,dt\leqslant\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}.$$
Enfin, par positivité de l'intégrale, nous obtenons que $J_n\geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3) Nous en déduisons, par encadrement, que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(2)$.

Exercice 17. Considérons $f : x\longmapsto\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}\,dt$.

1) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
2) En déduire que f est identiquement nulle sur son domaine de définition.

Correction :

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, la fonction $g : t\longmapsto\dfrac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $[\min(\frac{1}{x},x),\max(\frac{1}{x},x)]$ donc $f(x)$ est bien défini. Nous avons ainsi $D_f=\mathbb{R}^*$. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=G(x)-G(\frac{1}{x})$. Puisque G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons que f aussi. Enfin, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,
$$f'(x)=G'(x)+\frac{1}{x^2}G'(\frac{1}{x})=g(x)+\frac{1}{x^2}g(\frac{1}{x})=\frac{x^2-1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}+\frac{(\frac{1}{x})^2-1}{x^2(1+(\frac{1}{x})^2)\sqrt{1+(\frac{1}{x})^4}}=0.$$
On montre de même (à l'aide d'une primitive de g sur $\mathbb{R}_-^*$ que f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ de dérivée nulle.
2) Nous en déduisons que f est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et constante sur $\mathbb{R}_+^*$ (pas la même constante a priori attention). Par ailleurs $f(1)=0=f(-1)$ donc f est nulle sur $\mathbb{R}^*$.