Feuille d'exercice n° 14

Intégration d'une fonction sur un segment

I Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{1-4v}\,dv$,
2) $\displaystyle\int_{\ln(4)}^{\ln(2)} \left(3e^{-\frac{x}{4}}+1\right)^2 dx$,
3) $\displaystyle\int_1^2 e^u\left(\frac{1}{u}+\ln(u)\right) du$,
4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{5}{\cos^2(3z)}\,dz$,
5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \big(\cos^5(y)+4\cos^3(y)-7\big)\sin(y)\,dy$.
6) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{5+3t^2}\,dt$.

Exercice 2. Donner une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser :

1) $x\mapsto \dfrac{2x^4}{3}-\dfrac{x}{5}+1$,
2) $x\mapsto \dfrac{x}{1+x}$,
3) $x\mapsto 1-\sin(\pi-2x)$,
4) $x\mapsto \dfrac{\ln(x)}{2x}$,
5) $x\mapsto \dfrac{1+x}{(5+2x+x^2)^{2017}}$,
6) $x\mapsto \exp(x+e^x)$,
7) $x\mapsto \dfrac{1}{x(1+\ln^2(x))}$,
8) $x\mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$,
9) $x\mapsto 2^x$.

Exercice 3 (primitives et décomposition en éléments simples).

1) Montrer qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-3,0,3\},\qquad \frac{9}{x(x^2-9)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x+3}.$$

En déduire une primitive de $x\mapsto \dfrac{9}{x(x^2-9)}$ (sur un intervalle à préciser).

2) Montrer qu'il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{ax+b}{(x^2+2x+2)^2}+\frac{cx+d}{x^2+2x+2}.$$

En déduire une primitive de $x\mapsto \dfrac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ (sur un intervalle à préciser).

Exercice 4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 a^3e^{-\frac{a^2}{2}}\,da$, 2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\xi\ln(\xi)}{(1+\xi^2)^2}\,d\xi$, 3) $\displaystyle\int_1^e \ln^2(w)\,dw$, 4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)e^{\cos(t)}\,dt$.

Exercice 5. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.

1) $x\mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$,
2) $x\mapsto \cos(\ln(x))$
(*On pourra faire deux IPP consécutives*),
3) $x\mapsto x^\alpha\ln(x)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$,
4) Arccos, la fonction réciproque de $\cos : [0,\pi]\to[-1,1]$.

Exercice 6. Avec un changement de variables, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$ (*changement de variable* $t=1+x^2$),

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5(x)\cos^3(x)\,dx$ (*changement de variable* $t=\sin(x)$),

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ (*changement de variable* $x=\cos(t)$),

4) $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$ (*changement de variable* $t=e^x$).

Exercice 7. Avec un changement de variables, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.

$$1)\ x\mapsto e^{\sqrt{x}},\qquad 2)\ x\mapsto \frac{5x^2}{\sqrt{2-3x}},\qquad 3)\ x\mapsto \frac{\sqrt{1+x^3}}{x},\qquad 4)\ x\mapsto \tan^4(x).$$

On fera les changements de variables $t=e^{\sqrt{x}}$ *pour le* 1), $t=\sqrt{1+x^3}$ *pour le* 3) *et* $t=\tan(x)$ *pour le* 4) *(et on pourra utiliser le fait que, pour tout* $z\in\mathbb{R}$, $z^4=1+(z^2-1)(z^2+1)$*).*

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

$$1)\ \int_{-3}^4 \frac{|x-1|}{|x|+1}\,dx,\qquad 2)\ \int_{-1}^1 e^{-|u|}\,du,\qquad 3)\ \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}\,dx,\qquad 4)\ \int_{4/e}^{2e} \frac{\lfloor y\rfloor}{y}\,dy.$$

II Utilisation des propriétés de l'intégrale

Exercice 9. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Exercice 10 (formules de la moyenne). Soient a et b deux réels tels que $a<b$.

1) Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et g une fonction continue et positive sur $[a,b]$.
   a) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $f([a,b])=[m,M]$.
   b) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$ (première formule de la moyenne).
   On traitera séparément le cas où l'intégrale de g *entre* a *et* b *est nulle et le cas où elle est strictement positive.*
2) Soit f une fonction positive, décroissante et de classe C^1 sur $[a,b]$. Soit g une fonction continue sur $[a,b]$. Posons $G : x\in[a,b]\longmapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$.
   a) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $G([a,b])=[m,M]$.
   b) Via une intégration par parties, montrer que $mf(a)\leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant Mf(a)$.
   c) Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt$ (seconde formule de la moyenne).

Exercice 11. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1) Prolonger $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ en une fonction continue sur tout $\mathbb{R}$.
2) Soit $T > 0$. Supposons de plus que f est T-périodique.
   a) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.
   b) En déduire que, pour tous $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = \dfrac{nT}{x}g(T) + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{nT}^x f(t)\,dt$.
   c) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
   d) Montrer que g admet $g(T)$ pour limite en $+\infty$.

Exercice 12 (lemme de Riemann Lebesgue). Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0$.

Exercice 13 (inégalité de Cauchy-Schwarz). Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}\,\sqrt{\int_a^b g(t)^2\,dt}.$$

Discuter le cas d'égalité. *On fera le lien avec le discriminant du trinôme* $\int_a^b \big(f(t) + Xg(t)\big)^2\,dt$.

III Suites et fonctions définies par une intégrale

Exercice 14. Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = 0$. Montrer que

$$\forall t \in [a, b], \qquad \int_a^t f(u)\,du + \int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,du = tf(t).$$

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + t + t^n}\,dt$.

1) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $J_n = \ln(2) - I_n$ sous forme intégrale et montrer que $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 16. Considérons $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{-x}^{2x} \sqrt{1 + t^4}\,dt$.

1) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
2) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^2 \leqslant \sqrt{1 + t^4} \leqslant 1 + t^2$.
3) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{3x^3} = 1$.

Exercice 17. Considérons $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t^2 - 1}{(1 + t^2)\sqrt{1 + t^4}}\,dt$.

1) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
2) En déduire que f est identiquement nulle sur son domaine de définition.

Exercice 18. Considérons $F : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(xu)}{u^{3/2}}\, du$.

1) Calculer $F(0)$. A l'aide d'un encadrement, montrer que F est continue en 0.
2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. A l'aide d'un changement de variables, exprimer $F(x)$ en fonction d'une intégrale dont seules les bornes dépendent éventuellement de x.
3) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer sa dérivée.
4) Montrer que F est dérivable en 0.

   On pourra utiliser le fait (montré dans le TD3) que, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, $1 - \dfrac{y^2}{3} \leqslant \dfrac{\sin(y)}{y} \leqslant 1$.

IV Sommes de Riemann

Exercice 19. Pour chacun des cas suivants, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

1) $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$,
2) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$,
3) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2}$,
4) $u_n = \dfrac{1^x + 2^x + \cdots + n^x}{n^{x+1}}$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$,
5) $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n\, n!}\right)^{\frac{1}{n}}$,
6) $u_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \exp\left(\frac{k}{2n}\right)$ (oral ESCP).

Pour le calcul de la limite de la question 2, on pourra effectuer le changement de variable $x = \cos^2(t)$ et utiliser les intégrales de Wallis (cf. DM n° 8).

Exercice 20. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Posons $I(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 + 2x\cos(u) + 1)\, du$.

1) Montrer que l'intégrale $I(x)$ existe et que $I(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|x + e^{iu}\right|\, du$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left|x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right|$. Montrer que $I_n(x) = \ln|1 - x^n|$.
3) En déduire une expression de $I(x)$.