Correction de quelques exercices de la feuille de TD 13

I Dérivabilité et utilisation de la dérivée

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire sur f' lorsque f est paire, impaire ou périodique ?

Correction :

- Si f est dérivable et paire sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ donc $f'(x) = -f'(-x)$. Ainsi f' est impaire.
- Si f est dérivable et impaire sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$ donc $f'(x) = +f'(-x)$. Ainsi f' est paire.

Exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur intervalle de définition. Sont-elles de classes C^1 ?

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(\sqrt{|x|}) - \sqrt{|x|},$$

$$g : x \in \left]-1,1\right[\longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(|x|)}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}, \qquad h : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Pour la fonction f, on pourra utiliser le fait que que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h - \sin(h)}{h^3} = \dfrac{1}{6}$. Cela se montre par encadrement ou avec des équivalents *(cf. second semestre). On pourra évaluer la fonction g en les points $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$ et $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Correction :

- La fonction f est paire sur $\mathbb{R}$ donc on peut restreindre son étude à $\mathbb{R}_+$. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $\sin$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}T(\sqrt{x}),$$

avec $T : y \longmapsto \dfrac{\cos(y) - 1}{y}$. Or $\cos$ est dérivable en 0 donc $T(y) = \dfrac{\cos(y) - \cos(0)}{y - 0} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \cos'(0) = 0$. Nous en déduisons que $f'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Par parité de f (et donc imparité de f'), nous en déduisons que $f'(x) \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 0$. Ainsi f' admet 0 pour limite en 0. Le théorème de prolongation de la dérivée entraîne que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. Par ailleurs f' est continue en 0 donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On aurait pu aussi étudier la dérivabilité en 0 en revenant à la définition avec le taux d'accroissement et en utilisant la suggestion de l'exercice.

- La fonction g a été étudiée en cours.
- Une petite étude de fonction montre que la fonction $x \longmapsto x - \ln(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous en déduisons que h est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (par quotient de deux fonctions de classe C^1 avec la fonction dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$). Bien entendu h est aussi définie et de classe C^1 (et de dérivée nulle) sur $\mathbb{R}_-$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h'(x) = \frac{\dfrac{1}{x}(x - \ln(x)) - \ln(x)\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)}{(x - \ln(x))^2} = \frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2} = \frac{1}{\ln(x)} \frac{\dfrac{1}{\ln(x)} - 1}{\left(\dfrac{x}{\ln(x)} - 1\right)^2}.$$

Par croissances comparées, $\dfrac{x}{\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc $h'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Par ailleurs $h'(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$ (puisque h' est nulle sur $\mathbb{R}_-$). Ainsi h' admet 0 pour limite en 0. Le théorème de prolongation de la dérivée entraîne que h est dérivable en 0 et que $h'(0) = 0$. Par ailleurs h' est continue en 0 donc h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 4.

1) Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles telle que $f(0) = 0$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f'(0)}{2}.$$

On pourra s'aider du développement limité à l'ordre 1.

2) En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right), \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+n^2}{2n^2-k}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Correction :

1) Puisque f est une fonction dérivable sur $[0, 1]$, elle admet un développement limité d'ordre 1 : il existe une fonction ε définie sur $[0, 1]$, qui converge vers 0 lorsque x tend vers 0 et telle que

$$\forall x \in [0, 1], \qquad f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x) = xf'(0) + x\varepsilon(x).$$

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{k}{n^2} \in [0, 1]$ donc $f\left(\dfrac{k}{n^2}\right) = \dfrac{k}{n^2} f'(0) + \dfrac{k}{n^2} \varepsilon\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) - \frac{f'(0)}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

On a :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) - \frac{f'(0)}{2} = f'(0)\left(\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{f'(0)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
- Pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, \delta]$, $|\varepsilon(x)| \leqslant \eta$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n_0} \leqslant \delta$. Pour tous $n \geqslant n_0$ et $k \in [\![1, n]\!]$, $0 < \dfrac{k}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \delta$ donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leqslant \eta \frac{n+1}{2n} \leqslant \eta.$$

  Nous en déduisons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

2)
- La fonction Arctan est dérivable sur $[0, 1]$ et nulle en 0 donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \mathrm{Arctan}'(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+0^2} = \frac{1}{2}.$$

- La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{x+1}{2-x}$ est dérivable sur $[0, 1]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{k+n^2}{2n^2-k} = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2} + \sum_{k=0}^{n} \left(g\left(\frac{k}{n^2}\right) - g(0)\right).$$

  On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(g\left(\frac{k}{n^2}\right) - g(0)\right) = \frac{g'(0)}{2} = \frac{3}{8}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+n^2}{2n^2-k} = +\infty.$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n^2}\right),$$

avec $h : x \longmapsto \ln(1+x)$ dérivable sur $[0,1]$ et nulle en 0. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{h'(0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = e^{1/2}$.

II Dérivabilité d'applications réciproques

Exercice 5. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 1$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Correction : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est strictement positive si bien qu'elle est strictement croissante. Nous en déduisons qu'il s'agit d'une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Reste à montrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Introduisons pour cela la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) - 1 \geqslant 0$. Elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et donc

- Si $x \geqslant 0$, $f(x) = g(x) + x \geqslant g(0) + x$. Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $x \leqslant 0$, $f(x) = g(x) + x \leqslant g(0) + x$. Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Nous en déduisons que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exercice 6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, simplifier $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2x^2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

Correction : La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{2x^2}$, $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x}$ le sont sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi la fonction

$$\Phi : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= -\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+(1/2x)^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+((x+1)/x)^2} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+((x-1)/x)^2} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{x^2+(x+1)^2} + \frac{1}{x^2+(x-1)^2} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+2x+1} + \frac{1}{2x^2-2x+1} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{(2x^2+2x+1)-(2x^2-2x+1)}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{4x^4-4x^3+2x^2+4x^3-4x^2+2x+2x^2-2x+1} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{4x^4+1} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi Φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$. Or par continuité, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \operatorname{Arctan}(0) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

et $\lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ si bien que $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = \frac{\pi}{2}$. De même on calcule que $\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = \frac{\pi}{2}$. Nous en déduisons que Φ est constante sur $\mathbb{R}^*$ égale à $\frac{\pi}{2}$. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8. Dans l'exercice 11 de la feuille d'exercices 13, nous avons introduit les fonctions Arccos et Arcsin (les bijections de $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ et $\sin : [-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$ respectivement). Étudier la dérivabilité de ces fonctions sur $[-1,1]$ et calculer leurs dérivées.

Correction :

- La fonction $\cos$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et, pour tout $x \in]0,\pi,[$, $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$. Par conséquent Arccos est dérivable sur $f(]0,\pi[) =]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \text{Arccos}'(x) = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos}(x))} = \frac{-1}{\sin(\text{Arccos}(x))}.$$

  Or, si $y \in]0,\pi[$, $\sin(y) > 0$ et donc $\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}$. Nous en déduisons que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- La fonction $\sin$ est dérivable sur $[-\pi/2,\pi/2]$ et, pour tout $x \in]-\pi/2,\pi/2[$, $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$. Par conséquent Arcsin est dérivable sur $f(]-\pi/2,\pi/2[) =]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))}.$$

  Or, si $y \in]-\pi/2,\pi/2[$, $\cos(y) > 0$ et donc $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$. Nous en déduisons que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

III Égalité et inégalité des accroissements finis

Exercice 13 (Théorème des accroissements finis généralisés). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Supposons que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Correction : Considérons la fonction

$$\Phi : x \in [a,b] \longmapsto (f(b)-f(a))g(x) - (g(a)-g(b))f(x).$$

Il s'agit d'une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et on vérifie que $\Phi(a) = \Phi(b)$. Ainsi le théorème de Rolle entraîne qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\Phi'(c) = 0$, c'est-à-dire $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(a)-g(b))f'(c)$. Ensuite $g(b) \neq g(a)$ car sinon le théorème de Rolle entraîne que g' s'annule en un point de $]a,b[$, ce qui est exclu. Ainsi, on peut diviser par $g(b)-g(a)$ et on obtient $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Exercice 14. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Supposons que $f(0) = 0$ et que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(x)}{x} \leqslant f'(x)$.

En déduire les variations de la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque f est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, le théorème des accroissements finis entraîne qu'il existe $c_x \in]0,x[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(c_x)x$. Puisque $0 < c_x < x$ et que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f'(c_x) \leqslant f'(x)$. Ainsi $f(x) = f(x) - f(0) \leqslant f'(x)x$. D'où l'inégalité annoncée puisque $x > 0$.

La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right) \geqslant 0,$$

d'après ce qui précède. Ainsi g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-x}\ln(1+e^x)$.

1) Étudier les limite de f en $\pm\infty$.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Vérifier que $\ell \in]0,1[$.
4) Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ par $\ln(2)$.
5) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = e^{-x_n}\ln(1+e^{x_n})$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
6) Écrire un programme en `Scilab` qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Correction :
Les questions 1 à 4 ont été traitées en cours. La fonction g étant définie par, pour tout $y \in]-1,+\infty[$, $g(y) = -\ln(1+y) + \dfrac{y}{1+y}$. Nous avons montré qu'elle est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$|f'(x)| = |e^{-x}g(e^x)| = -e^{-x}g(e^x) = e^{-x}\ln(1+e^x) - \frac{1}{1+e^x} = e^{-x}\ln(1+e^x).$$

Une petite étude de fonction montrer que la fonction $z \longmapsto \ln(1+z) - z$ est décroissante sur $]1,+\infty[$ donc, pour tout $z \in]1,+\infty[$, $\ln(1+z) \leqslant z + \ln(2) - 1$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad |f'(x)| \leqslant e^{-x}(e^x + \ln(2) - 1) \leqslant 1 + e^{-x}(\ln(2)-1) \leqslant 1 + \ln(2) - 1 = \ln(2).$$

5) Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1 = f(x_0) > 0$ et une récurrence immédiate montre que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ par $\ln(2)$, l'inégalité des accroissements finis entraîne que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \ln(2)|x-y|.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)| \leqslant \ln(2)|x_n - \ell|.$$

Par récurrence immédiate, on obtient donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |x_n - \ell| \leqslant (\ln(2))^{n-1}|x_1 - \ell|.$$

Puisque $|\ln(2)| < 1$, nous en déduisons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

6) On choisit x_0 de telle sorte que $|x_1 - \ell| \leqslant 1$. On a alors, $|x_n - \ell| \leqslant \ln(2)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près, il suffit de calculer x_{n_0} où n_0 est tel que $\ln(2)^{n_0-1} \leqslant 10^{-4}$. Or on a

$$\ln(2)^{n_0-1} \leqslant 10^{-4} \iff (n_0-1)\ln(\ln(2)) \leqslant -4\ln(10) \iff n_0 \geqslant 1 - \frac{4\ln(10)}{\ln(\ln(2))},$$

puisque $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Voici un programme Scilab renvoyant une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-4} près :

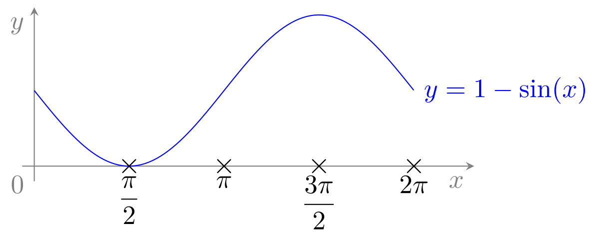
```
x=input('Entrez le terme initial :');
n=floor(1-4*log(10)/log(log(2)))+1;
for  k=1:n
     x=exp(-x)*log(1+exp(x));
end
disp('Une valeur approchée de la limite à 10∧(-4) près est'+string(x)+'.') ;
```

Exercice 17. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1 - \sin(x)$.

1) Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative sur $[0, 2\pi]$.
2) Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \sin(u_n)$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \geqslant 3$, $c \leqslant u_n \leqslant 1$.
3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Correction :

1) La fonction f est dérivable sur $[0, 2\pi]$ et $f' = -\cos$. Ainsi f est croissante sur $[\pi/2, 3\pi/2]$ et décroissante sur $[0, \pi/2]$ et sur $[3\pi/2, 2\pi]$. On en déduit la courbe représentative de f :



2) On a $u_1 = 1 - \sin(u_0) \in [0, 2]$. Ainsi $u_1 = 1 - \sin(u_1) \in [0, 1]$ (puisque $2 \in [0, \pi]$). Enfin $u_3 = 1 - \sin(u_2) \in [1 - \sin(1), 1]$. Posons $c = 1 - \sin(1)$. Par récurrence immédiate, on montre que $u_n \in [c, 1]$ pour tout $n \geqslant 3$.
3) Soit $g : x \in [c, 1] \longmapsto f(x) - x$. La fonction g est dérivable (donc continue) sur $[c, 1]$ et $g' = -\cos -1 < 0$ donc g est strictement décroissante sur $[c, 1]$. De plus $g(1) = -\sin(1) < 0$ et $g(c) = f(c) - c = \sin(1) - \sin(c) > 0$. Ainsi le théorème de la bijection entraîne l'existence d'un unique réel $\ell \in]c, 1[$ tel que $g(\ell) = 0$, i.e. $f(\ell) = \ell$.

   Posons $M = \max\limits_{[c,1]} |\cos|$. On a $|f'| = |\cos| \leqslant M$ sur $[c, 1]$ donc le théorème des accroissements finis entraîne que
   $$\forall (x, y) \in [c, 1]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x - y|.$$
   Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$, $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant M|u_n - \ell|$ et donc (par récurrence immédiate)
   $$\forall n \geqslant 3, \qquad |u_n - \ell| \leqslant M^{n-3}|u_3 - \ell|.$$
   Puisque $M < 1$, nous obtenons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.