Feuille d'exercice n° 13

Dérivation

I Dérivabilité et utilisation de la dérivée

Exercice 1. Donner le domaine de définition des fonctions suivants (et les prolonger éventuellement par continuité). Préciser ensuite les intervalles où elles sont dérivables et calculer leurs dérivées (préciser s'il y a des dérivées à gauche ou à droite).

1) $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$,
2) $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $(a,b,d,c) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$,
3) $x \mapsto \dfrac{-1}{(4x^2-1)^2}$,
4) $x \mapsto \sqrt{x^3 - x^2}$,
5) $x \mapsto x^x$,
6) $x \mapsto x\ln(x) - x$,
7) $x \mapsto (x^5+3x^3+2)^8$,
8) $x \mapsto \ln\left(1+\cos(\pi x^2)\right)$,
9) $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{-1+\sqrt{x^4+1}}{2}}$,
10) $x \mapsto \dfrac{4x^3+x^2-3}{2x^2-5x+2}$,
11) $x \mapsto \ln(x^4-3x^2+2)$,
12) $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{(\sin(x)+2)^4}$,
13) $x \mapsto e^{\cos^2(x)}$,
14) $x \mapsto (1+x^2)e^{\text{Arctan}(x)}$,
15) $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$,
16) $x \mapsto \sqrt[6]{\tan(x)}$,
17) $x \mapsto 1-\cos(\sqrt{|x-2|})$,
18) $x \mapsto (\sin(x))^{x^2}$,

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire sur f' lorsque f est paire, impaire ou périodique ?

Exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur leur intervalle de définition. Sont-elles de classes C^1 ?

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(\sqrt{|x|}) - \sqrt{|x|},$$

$$g : x \in \,]-1,1[\, \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(|x|)}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}, \qquad h : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-\ln(x)} & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Pour la fonction f, on pourra utiliser le fait que que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h-\sin(h)}{h^3} = \dfrac{1}{6}$. Cela se montre par encadrement ou avec des équivalents *(cf. second semestre). On pourra évaluer la fonction g en les points $\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1}$ et $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 4.

1) Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ et à valeurs réelles telle que $f(0)=0$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f'(0)}{2}.$$

On pourra s'aider du développement limité à l'ordre 1.

2) En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right), \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+n^2}{2n^2-k}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

II Dérivabilité d'applications réciproques

Exercice 5. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 1$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, simplifier $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

Exercice 7. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arctan}(1+x) - \operatorname{Arctan}(x)$.
En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$.

Exercice 8. Dans l'exercice 11 de la feuille d'exercices 13, nous avons introduit les fonctions Arccos et Arcsin (les bijections de $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ et $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ respectivement). Étudier la dérivabilité de ces fonctions sur $[-1, 1]$ et calculer leurs dérivées.

Exercice 9. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)}$ réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser. Étudier la dérivabilité de f^{-1} et exprimer sa dérivée.

Exercice 10. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x)f(y) \neq -1 \qquad \text{et} \qquad f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}. \qquad (*)$$

1) Déterminer toutes les fonctions constantes f vérifiant $(*)$.
2) Montrer qu'une fonction vérifiant $(*)$ et prenant la valeur 1 ou la valeur -1 en un certain point est constante.

On suppose dans la suite de l'exercice que f est une fonction dérivable non constante qui vérifie $(*)$.

3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < 1$ puis calculer $f(0)$.
4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $c = f'(0)$. En déduire que $c \neq 0$.
5) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et que f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$.
6) Calculer les dérivées des fonctions f^{-1} et $g : y \in]-1, 1[\longmapsto \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.
7) En déduire, pour tout $y \in]-1, 1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ en fonction de y et c.
8) Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles vérifiant $(*)$.

III Égalité et inégalité des accroissements finis

Exercice 11. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction dérivable sur un $[a, b]$ qui s'annule en exactement n points de $[a, b]$. Montrer que f s'annule en au moins $n - 1$ points de $]a, b[$.

Exercice 12. Une fonction est dite Lipschitzienne sur I si elle est k-Lipschitzienne sur I pour un certain $k \in \mathbb{R}_+^*$ (cf. exercice 19 de la feuille d'exercices 12).

1) Existe-il des fonctions Lipschitzienne qui ne sont pas dérivables ?
2) Soit f une fonction dérivable et Lipschitzienne sur I. Montrer que f' est bornée.
3) Montrer que, si f est dérivable sur I et si f' est bornée sur I, alors f est Lipschitzienne sur I.

Exercice 13 (Théorème des accroissements finis généralisés). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Supposons que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Exercice 14. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Supposons que $f(0) = 0$ et que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 15. Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto 4 - \dfrac{1}{4}\ln(x)$.

1) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et les limites de f en 0 et $+\infty$.
2) Montrer qu'il existe un unique réel $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(\ell) = \ell$. Vérifier que $\ell \in I =]3,4[$.
3) Montrer que $f(I) \subset I$ et que f' est bornée sur I par $\dfrac{1}{12}$.
4) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $y_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = f(y_n)$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in I$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|y_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{12}|y_n - \ell|$.
   c) En déduire que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 16. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-x}\ln(1+e^x)$.

1) Étudier les limite de f en $\pm\infty$.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Vérifier que $\ell \in]0,1[$.
4) Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ par $\ln(2)$.
5) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = e^{-x_n}\ln(1+e^{-x_n})$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
6) Écrire un programme en `Scilab` qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 17. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1 - \sin(x)$.

1) Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative sur $[0, 2\pi]$.
2) Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \sin(u_n)$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \geqslant 3$, $c \leqslant u_n \leqslant 1$.
3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.