Correction de quelques exercices de la feuille de TD 12

I Continuité sur un intervalle

Exercice 2. Un marathonien a parcouru une distance de 24km en deux heures. Montrer qu'il a parcouru exactement 12km durant un intervalle de temps d'une heure.
On étudiera $g : t \longmapsto f(t+1) - f(t)$ *où* $f : [0,2] \longrightarrow [0,24]$ *désigne la fonction telle que, pour tout* $t \in [0,2]$*,* $f(t)$ *est la distance déjà parcourue à l'instant* t*. On supposera que* f *est continue.*

Correction : On peut supposer la fonction continue sur $[0,2]$ (à moins que le marathonien ne se soit téléporté...). La fonction g est donc continue également sur $[0,1]$. On a $g(0) = f(1) - f(0) = f(1)$ et $g(1) = f(2) - f(1) = 24 - f(1)$. Ainsi $\dfrac{g(0)+g(1)}{2} = \dfrac{24 - f(1) + f(1)}{2} = 12$ si bien que $12 \in [g(0), g(1)]$ (il s'agit du milieu de ce segment). Le théorème des valeurs intermédiaires entraîne alors l'existence de $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) = 12$, c'est-à-dire $f(t_0+1) - f(t_0) = 12$. Cette dernière quantité représente la distance parcourue entre les temps t_0 et $t_0 + 1$.

Exercice 3. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions réelles distinctes. A l'aide d'un raisonnement par dichotomie, déterminer des encadrement de longueur au plus 10^{-1} de ces trois solutions (on pourra utiliser Scilab).

Correction : Notons $f : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$. Il s'agit d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Puisque

- $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$ et $0 \in [-1,3]$, le TVI entraîne qu'il existe $s \in [-2,-1]$ tel que $f(s) = 0$.
- $f(0) = 1$, $f(1) = -3$ et $0 \in [-1,1]$, le TVI entraîne qu'il existe $s \in [0,1]$ tel que $f(t) = 0$.
- $f(1) = -1$, $f(2) = 3$ et $0 \in [-1,2]$, le TVI entraîne qu'il existe $u \in [-2,-1]$ tel que $f(u) = 0$.

La fonction f s'annule en trois points distincts. Puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 3, ce sont les seuls.

Procédons par dichotomie pour donner une valeur approchée de s, t et u à 10^{-1} près.

- Pour s, on pose $a_0 = -2$ et $b_0 = -1$.
  - On calcule que $f\left(\dfrac{a_0+b_0}{2}\right) = \dfrac{17}{8} > 0$ donc on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2} = -\dfrac{3}{2}$. On a $|b_1 - a_1| > 10^{-1}$.
  - On calcule que $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right) = \dfrac{57}{64} > 0$ donc on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2} = -\dfrac{7}{4}$. On a $|b_2 - a_2| > 10^{-1}$.
  - On calcule que $f\left(\dfrac{a_2+b_2}{2}\right) > 0$ donc on pose $a_3 = a_2$ et $b_3 = \dfrac{a_2+b_2}{2} = -\dfrac{15}{8}$. On a $|b_3 - a_3| > 10^{-1}$.
  - On calcule que $f\left(\dfrac{a_3+b_3}{2}\right) < 0$ donc on pose $a_4 = \dfrac{a_3+b_3}{2} = -\dfrac{31}{16}$ et $b_4 = b_3$. On a $|b_4 - a_4| > 10^{-1}$.

  Ainsi un encadrement de longueur 10^{-1} de s est $\left[-\dfrac{31}{16}, -\dfrac{15}{8}\right]$.
- De même on obtient l'encadrement $\left[\dfrac{5}{16}, \dfrac{3}{8}\right]$ de t un encadrement de longueur 10^{-1}.
- De même on obtient l'encadrement $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{25}{16}\right]$ de u un encadrement de longueur 10^{-1}.

II Théorème de la bijection et fonction Arctangente

Exercice 10. Dans les cas suivants, montrer que f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J (que l'on précisera) et expliciter f^{-1} sur J.

$$1)\ f : x \mapsto \sqrt{1+3(\ln(x))^2}, \qquad 2)\ f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}, \qquad 3)\ f : x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Correction :

1) Vu en cours.
2) Déjà, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+2 > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus la fonction $x \longmapsto x^2+x+2$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur $I = [-1/2, +\infty[$ (resp. $I' =]-\infty, -1/2]$). Par conséquent la fonction f est strictement décroissante (resp. croissante) sur I (resp. I'). Ainsi le théorème de la bijection entraîne que $f\big|_I$ (resp. $f\big|_{I'}$) réalise une bijection de I sur $f(I)$ (resp. de I' sur $f(I')$).
   - **Réciproque de $f\big|_I$.** La réciproque est continue et strictement décroissante sur $f(I)$.

     Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} = 0^+$, on obtient par composition que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$. On a aussi $f(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Ainsi $f(I) =]0, \frac{2}{\sqrt{7}}]$. Exprimons la réciproque. Pour tout $x \in I$ et $y \in f(I)$, on a

     $$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{y^2} = x^2+x+2,$$

     car $t \longmapsto t^{-2}$ est une bijection sur $f(I) \subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi $y = f(x)$ si et seulement si $x^2+x+2-\frac{1}{y^2} = 0$. Il s'agit d'un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta_y = 1-4\left(2-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{4}{y^2}-7 > 0$ car $y < \frac{2}{\sqrt{7}}$. Puisque $x > -\frac{1}{2}$, on en déduit que $y = f(x)$ si et seulement si $x = \frac{-1+\sqrt{\Delta_y}}{2}$.

     La réciproque de f sur I est donc $y \in]0, \frac{2}{\sqrt{7}}] \longmapsto \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{4}{y^2}-7}\right)$.
   - **Réciproque de $f\big|_{I'}$.** La réciproque est continue et strictement croissante sur $f(I')$.

     On montre de même que la réciproque de f sur I' est donc $y \in]0, \frac{2}{\sqrt{7}}] \longmapsto \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{\frac{4}{y^2}-7}\right)$.
3) Une brève étude de fonction montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante (resp. décroissante) sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$). Ainsi le théorème de la bijection entraîne que $f\big|_I$ (resp. $f\big|_{I'}$) réalise une bijection continue et strictement décroissante (resp. croissante) de I sur $f(I)$ (resp. de I' sur $f(I')$).
   - **Réciproque de $f\big|_{\mathbb{R}_+}$.** La réciproque est continue et strictement croissante sur $f(\mathbb{R}_+)$.

     Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x\frac{1+e^{-2x}}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On a aussi $f(0) = 1$. Ainsi $f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$. Exprimons la réciproque. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in f(\mathbb{R}_+)$, on a

     $$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad & e^{2x}-2ye^x+1 = 0, \\ & & \Longleftrightarrow \quad & X^2-2yX+1 = 0 \text{ et } X = e^x. \end{aligned}$$

     Il s'agit d'un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta_y = 4y^2-4 = 4(y^2-1)$ car $y > 1$. Puisque $x \geqslant 0$, on en déduit que $y = f(x)$ si et seulement si $e^x = \frac{2y+\sqrt{\Delta_y}}{2} = y+\sqrt{y^2-1}$.

     La réciproque de f sur $\mathbb{R}_+$ est donc $y \in [1, +\infty[\longmapsto \ln(y+\sqrt{y^2-1})$.

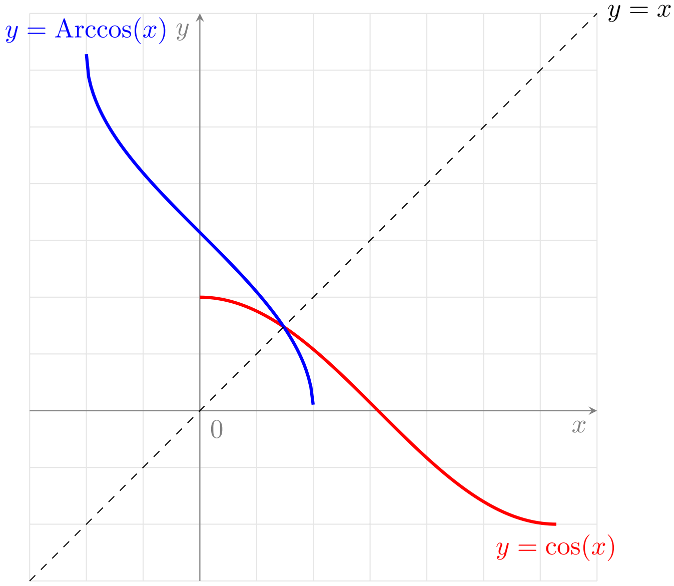
- **Réciproque de $f|_{\mathbb{R}_-}$.** La réciproque est continue et strictement décroissante sur $f(\mathbb{R}_-)$.
  On montre de même que la réciproque de f sur $\mathbb{R}_-$ est $y \in [1, +\infty[\longmapsto \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$.

Exercice 11.

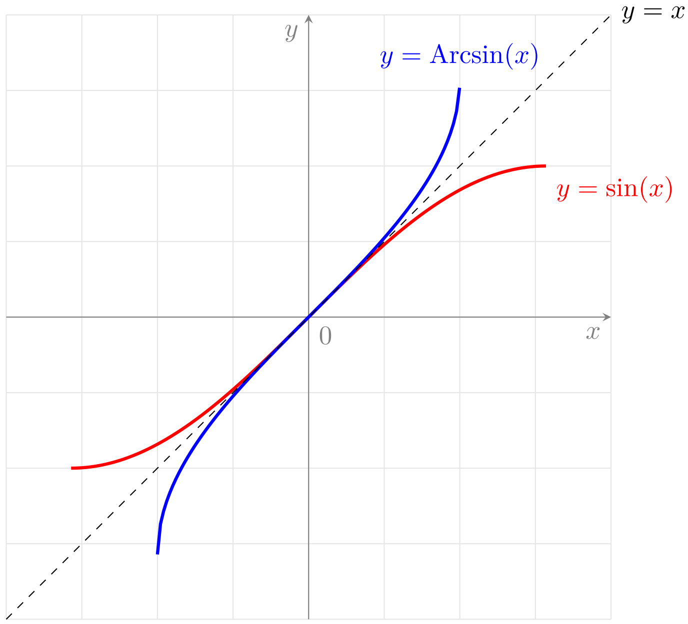
1) Montrer que la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur un intervalle à préciser. On note Arccos sa bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de Arccos et tracer sa courbe représentative.
2) Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur un intervalle à préciser. On note Arcsin sa bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de Arcsin et tracer sa courbe représentative.
3) Donner les valeurs de $\sin(\text{Arccos}(x))$ et $\cos(\text{Arcsin}(x))$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Correction :

1) La fonction $\cos$ est strictement décroissante et continue sur $[0, \pi]$. De plus $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. Ainsi le théorème de la bijection entraîne qu'elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Sa réciproque est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.



2) La fonction $\sin$ est strictement croissante et continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$. De plus $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\cos(\pi/2) = 1$. Ainsi le théorème de la bijection entraîne qu'elle réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. Sa réciproque est strictement croissante sur $[-1, 1]$.



3) Soit $x \in [-1,1]$. On a

- $\cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x$ donc $\sin^2(\mathrm{Arccos}(x)) = 1-\cos^2(\mathrm{Arccos}(x)) = 1-x^2$. Or nous avons $\mathrm{Arccos}(x) \in [0,\pi]$ donc $\sin(\mathrm{Arccos}(x)) > 0$ et donc $\sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
- $\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$ donc $\cos^2(\mathrm{Arccos}(x)) = 1-\sin^2(\mathrm{Arccos}(x)) = 1-x^2$. Or nous avons $\mathrm{Arcsin}(x) \in [-\pi/2,\pi/2]$ donc $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) > 0$ et donc $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Exercice 14. Soient $f : x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ et $g : x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \tan(x)$

1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f. Prolonger f aux éventuelles bornes finies de D_f afin qu'elle soit continue à gauche (si c'est possible).
2) Expliciter l'application $f \circ g$. En déduire $f(x)$ en fonction de $\mathrm{Arctan}(x)$ pour tout $x \in D_f$.
3) Représenter graphiquement l'application f dans un repère orthonormé.

Correction :

1) On a $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$. De plus

$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{2x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to(-1)^+} \frac{2x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty$$

donc, par composition

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Pour que f soit continue à gauche, on la prolonge en posant $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{2}$.

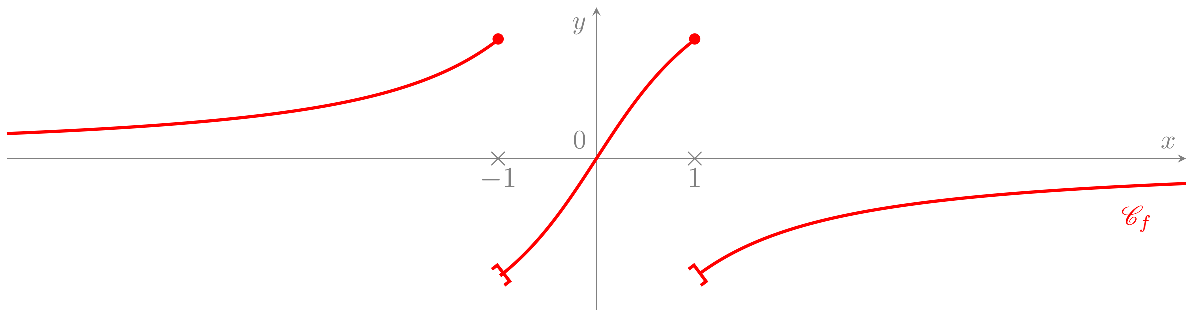
2) Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Big\backslash \left\{-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\}$, alors la formule de duplication de la tangente entraîne alors que $\frac{2g(x)}{1-g^2(x)} = g(2x)$. Par conséquent

$$f\circ g(x) = \mathrm{Arctan}(\tan(2x)) = \begin{cases} 2x+\pi & \text{si} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[, \\ 2x & \text{si} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[, \\ 2x-\pi & \text{si} \quad x \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

Soit $x \in D_f$. On a donc

$$\begin{aligned} f(x) = f\circ g\circ g^{-1}(x) &= \begin{cases} 2\,\mathrm{Arctan}(x)+\pi & \text{si} \quad \mathrm{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[, \\ 2\,\mathrm{Arctan}(x) & \text{si} \quad \mathrm{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[, \\ 2\,\mathrm{Arctan}(x)-\pi & \text{si} \quad \mathrm{Arctan}(x) \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\,\mathrm{Arctan}(x)+\pi & \text{si} \quad x \in \left]-\infty,-1\right[, \\ 2\,\mathrm{Arctan}(x) & \text{si} \quad x \in \left]-1,1\right[, \\ 2\,\mathrm{Arctan}(x)-\pi & \text{si} \quad x \in \left]1,+\infty\right[. \end{cases} \end{aligned}$$

3) On en déduit le tracé de la courbe représentative de f :



III Autres propriétés globales

Exercice 17. Soient f et g deux fonctions bornées sur un intervalle I. Montrer que $f+g$ est bornée sur I et que $\sup\limits_I |f+g| \leqslant \sup\limits_I |f| + \sup\limits_I |g|$. Montrer qu'il n'y a pas égalité en général.

Correction : Notons M_f et M_g les bornes supérieures de $|f|$ et $|g|$ respectivement. Pour tout $x \in I$, on a

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant M_f + M_g.$$

Ainsi $|f+g|$ est majorée sur I par $M_f + M_g$. Nous en déduisons que $f+g$ admet une borne supérieure et que celle-ci est inférieure ou égale à $M_f + M_g$.

Il n'y a pas d'égalité en général. Prenons par exemple le cas des fonctions sinus et cosinus, toutes les deux bornées par 1. Pourtant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right| = \sqrt{2}\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \sqrt{2} < 2.$$