Feuille d'exercice n° 12

Étude globale de fonctions

I Continuité sur un intervalle

Exercice 1. Que dire d'une fonction f continue vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big(f(x)\big)^2 = f(x)$.

Exercice 2. Un marathonien a parcouru une distance de 24km en deux heures. Montrer qu'il a parcouru exactement 12km durant un intervalle de temps d'une heure.
On étudiera $g : t \longmapsto f(t+1) - f(t)$ où $f : [0,2] \longrightarrow [0,24]$ désigne la fonction telle que, pour tout $t \in [0,2]$, $f(t)$ est la distance déjà parcourue à l'instant t. On supposera que f est continue.

Exercice 3. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions réelles distinctes. A l'aide d'un raisonnement par dichotomie, déterminer des encadrement de longueur au plus 10^{-1} de ces trois solutions (on pourra utiliser Scilab).

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) < g(x)$. Montrer que $f \leqslant g$ sur tout $\mathbb{R}$. A-t-on $f < g$?

Exercice 5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Montrer que toute application continue $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ admet un point fixe.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. L'objectif de cet exercice est de montrer que f admet un unique point fixe, *i.e.* il existe un unique réel y tel que $f(y) = y$.

1) On pose $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) - x$. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
2) En déduire que f admet un point fixe et qu'il est nécessairement unique.
3) Est-ce que ce résultat est vrai si f est une fonction croissante ?

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Supposons que f admette des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > m$.

Exercice 9 (D'après oral ESCP). Soit $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $g_u : x \in [-1,1] \longrightarrow ux - f(x)$.

1) Soit $u \in \mathbb{R}$. Montrer que g_u admet un maximum $M(u)$. On note E_u l'ensemble des réels de $[-1,1]$ en lesquels g_u atteint son maximum.
2) Soient $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et soient $x \in E_u$ et $y \in E_v$. Montrer que $M(u) - M(v) \leqslant (u-v)x$ et que $M(v) - M(u) \leqslant (v-u)y$. En déduire que $|M(v) - M(u)| \leqslant |u - v|$.
3) Montrer que la fonction $M : u \in \mathbb{R} \longmapsto M(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

II Théorème de la bijection et fonction Arctangente

Exercice 10. Dans les cas suivants, montrer que f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J (que l'on précisera) et expliciter f^{-1} sur J.

$$1)\ f : x \mapsto \sqrt{1 + 3(\ln(x))^2}, \qquad 2)\ f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 2}}, \qquad 3)\ f : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Exercice 11.

1) Montrer que la fonction cosinus réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur un intervalle à préciser. On note Arccos sa bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de Arccos et tracer sa courbe représentative.
2) Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2,\pi/2]$ sur un intervalle à préciser. On note Arcsin sa bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de Arcsin et tracer sa courbe représentative.
3) Donner les valeurs de $\sin(\operatorname{Arccos}(x))$ et $\cos(\operatorname{Arcsin}(x))$ pour tout $x \in [-1,1]$.

Exercice 12. Calculer $\operatorname{Arctan}(\tan(x))$, $\tan(\operatorname{Arctan}(x))$, $\cos(\operatorname{Arctan}(x))$ et $\sin(\operatorname{Arctan}(x))$ pour tout réel x (lorsque cela a un sens).

Exercice 13 (formule de Machin). Montrer que $\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{239}\right)$.

Exercice 14. Soient $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ et $g : x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\longmapsto \tan(x)$

1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f. Prolonger f aux éventuelles bornes finies de D_f afin qu'elle soit continue à gauche (si c'est possible).
2) Expliciter l'application $f \circ g$. En déduire $f(x)$ en fonction de $\operatorname{Arctan}(x)$ pour tout $x \in D_f$.
3) Représenter graphiquement l'application f dans un repère orthonormé.

Exercice 15. Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\ln(x)$.

1) Montrer que, pour tout $t > 0$, il existe un unique réel $g(t) > 1$ tel que $f(g(t)) = \dfrac{1}{t}$.
2) Montrer g ainsi définie est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n strictement positif tel que $1 + \sqrt{x_n}\ln(x_n) = n$. Déterminer le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et étudier sa limite.

III Autres propriétés globales

Exercice 17. Soient f et g deux fonctions bornées sur un intervalle I. Montrer que $f+g$ est bornée sur I et que $\sup_I |f+g| \leqslant \sup_I |f| + \sup_I |g|$. Montrer qu'il n'y a pas égalité en général.

Exercice 18. Soit f une fonction croissante sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$. On souhaite montrer que f admet un point fixe

1) Montrer que $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}$ possède une borne supérieure a vérifiant $f(a) \geqslant a$.
2) Montrer que $f(a) \in A$ et conclure.
3) Qu'en est-il si f est décroissante ?

Exercice 19. Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$ et I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application k-Lipschitzienne, c'est-à-dire telle que

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

1) Montrer que f est continue sur I.
2) Supposons que $k \in]0,1[$, que I est un segment et que $f(I) \subset I$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   a) Montrer que f admet un unique point fixe $\ell \in I$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ell| \leqslant k^n|x_0 - \ell|$.
   c) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
   d) Déterminer une valeur de n pour laquelle x_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.