Correction de quelques exercices de la feuille de TD 11

I Calcul de limites

Exercice 2. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

2) $x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$.

3) $x \mapsto \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x + 1}{9 - 4x^2}$.

4) $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}}$.

5) $x \mapsto x + \sqrt{x+1}\ln(x+1)$.

6) $x \mapsto \sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x+1}}$.

Correction : Les trois premières ont été traitées en cours.

4) La fonction $f : x \longmapsto \sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}}$ est définie sur $D_f =]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup]5, +\infty[$.

- **en 5^+ :** On a $\dfrac{2+3x}{x-5} \underset{x\to 5^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par composition, $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}} \underset{x\to 5^+}{\longrightarrow} +\infty$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote verticale en 5^+.
- **en $\pm\infty$:** Pour tout $x \in D_f$, on a $\dfrac{2+3x}{x-5} = \dfrac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{5}{x}}$. Ainsi $\dfrac{2+3x}{x-5} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 3$ et, par continuité de la fonction racine cubique en 3, on obtient $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt[3]{3}$. De même $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \sqrt[3]{3}$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale en $\pm\infty$.

5) La fonction $f : x \longmapsto x+\sqrt{x+1}\ln(x+1)$ est définie sur $D_f =]-1, +\infty[$. Par ailleurs $\sqrt{y}\ln(y) \underset{y\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Nous en déduisons que $\sqrt{x+1}\ln(x+1) \underset{y\to(-1)^+}{\longrightarrow} 0$ si bien que l'on peut prolonger f par continuité en -1 en posant $f(-1) = -1$.

On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Cherchons une éventuelle asymptote en $+\infty$. Pour tout $x \in D_f\backslash\{0\}$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x+1}\ln(x+1)}{x} = 1 + \frac{x+1}{x}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}.$$

Par croissances comparées $\dfrac{\ln(y)}{\sqrt{y}} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et, puisque $\dfrac{x+1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on obtient $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par contre

$$f(x) - x = \sqrt{x+1}\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction parallèle à l'axe $y = x$.

6) La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x+1}}$ est définie sur $D_f =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$.

- **en $(-1)^-$:** On a $\dfrac{(x-1)^3}{x+1} \underset{x\to(-1)^-}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par composition, $f(x) \underset{x\to 5^+}{\longrightarrow} +\infty$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote verticale en $(-1)^-$.
- **en $+\infty$:** Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2(1+x)}} = \sqrt{\frac{(1-\frac{1}{x})^3}{1+\frac{1}{x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ensuite, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$f(x) - x = \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}} - x = \frac{\frac{(x-1)^3}{x+1} - x^2}{\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}} + x} = \frac{\frac{(x-1)^3}{x(x+1)} - x}{\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}} + 1}.$$

On a $\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}} + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ et

$$\frac{(x-1)^3}{x(x+1)} - x = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - x^2}{x(x+1)} = \frac{-4x^2 + 3x - 1}{x(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -4.$$

Ainsi $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -2$. Nous en déduisons que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x - 2$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

- **en $-\infty$:** Pour tout $x \in \left]-\infty, -1\right[$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = -\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2(1+x)}} = -\sqrt{\frac{(1-\frac{1}{x})^3}{1+\frac{1}{x}}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Ensuite, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$f(x) + x = \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}} + x = \frac{\frac{(x-1)^3}{x+1} - x^2}{\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}} - x} = \frac{\frac{(x-1)^3}{x(x+1)} - x}{-\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}} - 1}.$$

On a $\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\sqrt{-\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}} - 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -2$ et

$$\frac{(x-1)^3}{x(x+1)} - x = \frac{-4x^2 + 3x - 1}{x(x+1)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -4.$$

Ainsi $f(x) - x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 2$. Nous en déduisons que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = -x + 2$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

II Continuité en un point

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et continues en $x_0 \in I$. Nous définissons les fonctions $\phi = \min(f, g)$ et $\psi = \max(f, g)$ sur I par

$$\forall x \in I, \qquad \phi(x) = \min(f(x), g(x)) \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \max(f(x), g(x)).$$

Montrer que $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont continues en x_0.

On pourra écrire au préalable $\max(x, y)$ *et* $\min(x, y)$*, pour* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, en termes d'opérations élémentaires et de valeurs absolues.*

Correction : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. On a

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - y + x}{2} = x = \min(x, y)$$

et

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + y - x}{2} = y = \max(x, y).$$

Si f et g sont continues sur I, alors les fonctions $\min(f, g) = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$ et $\max(f, g) = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$ sont continues sur I.

III Équations fonctionnelles

Exercice 10. Notons $\mathcal{A} = \{g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R},\ g(x^2) = g(x)\}$.

1) Donner un exemple de fonction non constante appartenant à $\mathcal{A}$.
2) Soit f une fonction de $\mathcal{A}$ qui est continue en 0 et en 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{1/2^n})$. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1) La fonction $g_0 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_0(x^2) = g_0(x)$.
2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Raisonnons par récurrence. L'initialisation est immédiate. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{1/2^n})$. On a alors

$$f(x^{1/2^{n+1}}) = f\big(\sqrt{x^{1/2^n}}\big) = f\left(\big(\sqrt{x^{1/2^n}}\big)^2\right) = f(x^{1/2^n}) = f(x).$$

D'où le résultat par récurrence. Puisque la fonction f est continue en 1 et que $x^{1/2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on obtient $f(x) = f(x^{1/2^n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$. Ainsi $f(x) = f(1)$.

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = f(x^2) = f((-x)^2) = f(-x) = f(1)$. Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}^*$. Puisque f est continue en 0, on obtient $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$. Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}$.

IV Exercices plus théoriques

Les exercices 11 et 12 ne sont pas à traiter en priorité et s'éloignent de l'esprit du programme d'ECS. L'exercice 13 aurait pu faire l'objet d'un problème en DS.

Exercice 10. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est périodique et qui admet une limite finie en $+\infty$?

Correction : Notons $T > 0$ une période de f et notons ℓ la limite finie de f en $\mathbb{R}$. Si f n'est pas constante, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq \ell$. Considérons $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0) - \ell|}{2} > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x > A$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 + nT > A$. On a alors

$$|f(x_0) - \ell| = |f(x_0 + nT) - \ell| \leqslant \varepsilon = \frac{|f(x_0) - \ell|}{2}.$$

C'est absurde. Ainsi f est constante égale à ℓ.

Exercice 11. La fonction de Dirichlet est la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$

1) Montrer que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
On pourra utiliser le fait que, pour tout réel x_0, il existe une suite de rationnels qui converge vers x_0.
2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{p\to+\infty} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^{2n}(p!x\pi) \right)$.
3) Étudier la continuité de la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \longmapsto xf(x)$.

Correction :

1)
- Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f est continue en x_0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = x_0 + \dfrac{\pi}{n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ de telle sorte que$f(x_n) = 0$. Puisque f est continue en x_0, on obtient que $0 = f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$ et donc $f(x_0) = 0$. C'est absurde étant donné que $x_0 \in \mathbb{Q}$. Par l'absurde, on obtient donc que f n'est pas continue en x_0.
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f est continue en x_0. On a vu en cours (cf. chapitre 6) qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x_0. Puisque f est continue en x_0, on obtient que $1 = f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$ et donc $f(x_0) = 1$. C'est absurde étant donné que $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Par l'absurde, on obtient donc que f n'est pas continue en x_0.

2) • Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{a}{b}$. Pour $p \geqslant b$, on a $p!x \in \mathbb{Z}$ donc $\cos^2(p!x\pi) = 1$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^{2n}(p!x\pi) = 1$ et donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^{2n}(p!x\pi)\right) = 1 = f(x)$.

• Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $\left|\cos^2(p!x\pi)\right| < 1$ (car si $\cos^2(p!x\pi) = 1$, alors $p!x\pi \equiv 0\,[\pi]$ donc $p!x \in \mathbb{Z}$ et donc x est rationnel). Nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^{2n}(p!x\pi) = 0$ et donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^{2n}(p!x\pi)\right) = 0 = f(x)$.

3) On montre de même que la fonction φ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}^*$. Par contre elle est continue en 0. En effet, puisque f est bornée par 1, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\varphi(x) - \varphi(0)| = |x|\, f(x) \leqslant |x|.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, on obtient par encadrement $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \varphi(0)$. D'où la continuité de φ en 0.

Exercice 12. La fonction de Thomae est la fonction

$$T : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{q} & \text{si} \quad x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^* \text{ (avec } p \in \mathbb{Z}^* \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \text{ premiers entre eux).} \end{cases}$$

1) Montrer que T est 1-périodique.
2) Montrer que T est discontinue en tout rationnel.
3) Nous allons montrer que T est continue en tout irrationnel.
   a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $A_\varepsilon = \{y \in [0,1] \,|\, T(y) > \varepsilon\}$ est un ensemble fini.
   b) En déduire que, pour tous $\varepsilon > 0$ et $a \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$, il existe $\delta > 0$ tel que $A_\varepsilon \cap [a-\delta, a+\delta] = \varnothing$.
   c) Conclure.

Correction :

1) • Si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, alors $x+1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et donc $T(x+1) = 0 = T(x)$.

• Si $x \in \mathbb{Z}^*$ alors $x = \dfrac{x}{1}$ donc $T(x) = 1 = T(0)$.

• Si $x \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, alors il existe $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que p et q sont premiers entre eux. On a $x+1 = \dfrac{p+q}{q}$. Si d est un diviseur de $p+q$ et de q, alors d divise $p = (p+q)-q$ et donc $d = 1$. Ainsi $T(x+1) = \dfrac{1}{q} = T(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(x+1) = T(x)$. La fonction T est donc 1-périodique.

2) Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que T est continue en x_0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = x_0 + \dfrac{\pi}{n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ de telle sorte que $T(x_n) = 0$. Puisque T est continue en x_0, on obtient que $T(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T(x_0)$ et donc $T(x_0) = 0$. C'est absurde étant donné que $x_0 \in \mathbb{Q}$. Par l'absurde, on obtient donc que T n'est pas continue en x_0.

3) a) Si $\varepsilon \geqslant 1$, alors $A_\varepsilon = \varnothing$ puisqu'on remarque que $T(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Si $x \in A_\varepsilon$, alors $T(x) > 0$ et donc $x \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $x = \dfrac{p}{q}$. On a alors $\dfrac{1}{q} = T(x) > \varepsilon$ et donc $q\dfrac{1}{\varepsilon}$. Seul un nombre fini d'entiers q vérifient cette condition. Enfin $x \in [0,1]$ donc $p < q$ et donc seul un nombre fini d'entiers p vérifient cette condition. Nous en déduisons que A_ε est fini.

b) Soient $\varepsilon > 0$ et $a \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$. Dans le cas où $n = \mathrm{card}(A_\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, notons $y_1, \ldots, y_n$ les éléments de A_ε. Si $\delta = \dfrac{1}{2}\min(|a-y_1|, \ldots, |a-y_n|) > 0$ alors $A_\varepsilon \cap [a-\delta, a+\delta] = \varnothing$.

c) Soient $\varepsilon > 0$ et $a \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$. Nous avons montré qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta]$, $x \notin A_\varepsilon$, c'est-à-dire $T(x) \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $|T(x) - T(0)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi T est continue en a. Enfin le fait que T soit 1-périodique garantit que T est continue en tout irrationnel.

Exercice 13. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que $0 \in I$ n'est pas une extrémité de 0. Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles. Pour tout $x \in I\backslash\{0\}$, posons $g(x) = \dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$. Supposons que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

1) Montrer que l'on peut supposer que $\ell = 0$ (ce que l'on supposera désormais).
2) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I\backslash\{0\}$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(2^{-n}x)}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{g(2^{-k}x)}{2^k}$.
3) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et conclure.

Correction :

1) Supposons que $\lim\limits_{x\to 0} \widetilde{f}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2x)-f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$. Posons $\widetilde{f} : x \longmapsto f(x) - x\ell$. On a alors $\lim\limits_{x\to 0} \widetilde{f}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\widetilde{f}(2x)-\widetilde{f}(x)}{x} = 0$. Si on montre que cela entraîne que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\widetilde{f}(x)}{x} = 0$, alors on obtiendra $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$. Voilà pourquoi on peut se ramener au cas où $\ell = 0$.
2) Le résultat s'obtient par récurrence sur n.
3) Soit $x \in I\backslash\{0\}$. La question précédente entraîne que

$$\left|f(x) - f(2^{-n}x)\right| = |x| \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{g(2^{-k}x)}{2^k}\right| \leqslant |x| \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{g(2^{-k}x)}{2^k}\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in \left]-\delta, \delta\right[$, $|g(y)| \leqslant \varepsilon$. Soit $x \in \left]-\delta, \delta\right[$. On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2^{-k}x \in \left]-\delta, \delta\right[$ et donc $|g(2^{-k}x)| \leqslant \varepsilon$. Nous en déduisons que

$$\left|f(x) - f(2^{-n}x)\right| \leqslant |x| \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{g(2^{-k}x)}{2^k}\right| \leqslant |x| \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = |x|\,\varepsilon \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

Or $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-2^{-n}}{1-2^{-1}} = 1 - 2^{-n} \leqslant 1$ et donc $|f(x) - f(2^{-n}x)| \leqslant \varepsilon|x|$. En faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(2^{-n}x) = 0$ et donc $|f(x)| \leqslant \varepsilon|x|$. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in \left]-\delta, 0\right[\cup \left]0, \delta\right[, \qquad \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. D'après la question 1, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.