Feuille d'exercice n° 11

Limite et continuité en un point

I Calcul de limites

Exercice 1. Étudier les (éventuelles) limites suivantes. On distinguera éventuellement les limites à gauche et à droite.

1) $x \mapsto \dfrac{2}{4x-3x^2-1}$ en 1.
2) $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ en 0.
3) $x \mapsto \sqrt{7-x}-\sqrt{3-x}$ en 0 et en $-\infty$.
4) $x \mapsto \dfrac{3x-\sqrt{x}}{x+2\ln(x)}$ en $+\infty$.
5) $x \mapsto 2x^4+x-5+\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+4}}{x-1}$ en 1.
6) $x \mapsto x^3e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
7) $x \mapsto x^x$ en 0^+.
8) $x \mapsto \dfrac{3-5x}{x^2\ln(x)}$ en 0^+ et en $+\infty$.
9) $x \mapsto x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
10) $x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
11) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{3}-2\cos(x)}{1-2\sin(x)}$ en $\dfrac{\pi}{6}$.
12) $x \mapsto \dfrac{7\sin(x)-\sin(5x)}{\sin(6x)}$ en 0.
13) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin(x)}$ en 0.
14) $x \mapsto \ln(x)\ln(\ln(x))$ en 1^+.
15) $x \mapsto \ln(\sin(x))-\ln(x)$ en 0^+.
16) $x \mapsto \sin(\ln(x))$ en $+\infty$.
17) $x \mapsto \dfrac{3\sin(x)-4\sin^3(x)}{\sin(3x)}$ en 0.
18) $x \mapsto x^\alpha\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en 0^+, avec $\alpha\in\mathbb{R}_+$.

Exercice 2. Etudier les branches infinies des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.
2) $x \mapsto \ln(e^x+e^{-x})$.
3) $x \mapsto \dfrac{x^3-4x^2+5x+1}{9-4x^2}$.
4) $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}}$.
5) $x \mapsto x+\sqrt{x+1}\ln(x+1)$.
6) $x \mapsto \sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x+1}}$.

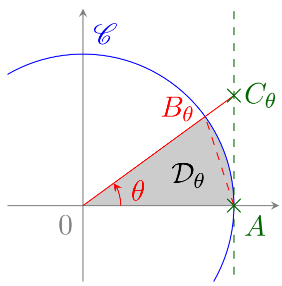
Exercice 3. Notons $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé et $\mathcal{D}$ le disque (d'aire π) dont il est la frontière. Soit A le point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(1,0)$. Fixons $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et notons

— B_θ le point du cercle $\mathscr{C}$ tel que l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB_\theta})=\theta$.

— C_θ le point d'intersection de la droite $(0B_\theta)$ avec la droite d'équation $x=1$.

— $\mathcal{D}_\theta$ le secteur angulaire délimité par $\mathscr{C}$ et par les deux rayons $[OA]$ et $[OB_\theta]$.

1) Sachant que l'aire de $\mathcal{D}_\theta$ est proportionnelle à l'angle θ, calculer son aire.
2) Calculer l'aire des triangles AOB_θ et AOC_θ.
3) En remarquant que $AOB_\theta\subset\mathcal{D}_\theta\subset AOC_\theta$, en déduire que
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}=1.$$



II Continuité en un point

Exercice 4. Prolonger par continuité les fonctions (lorsque c'est possible) aux bornes finies de leurs ensembles de définition :

$$f : x \mapsto \frac{x^2+4x-5}{2\sqrt{x+5}}, \qquad g : x \mapsto 1 - \frac{x}{|x|}, \qquad h : x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{2|x|}\right), \qquad k : x \mapsto x - \ln(x-1).$$

Exercice 5. Les fonctions suivantes sont-elles continues en tout point de $\mathbb{R}$? Si non, préciser les points de discontinuité.

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \end{cases},$$

$$g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+e^{-1/x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases},$$

$$h : x \longmapsto \begin{cases} \sin(x)\ln(-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^{-3/2}(1-\cos(2x)) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et continues en $x_0 \in I$. Nous définissons les fonctions $\phi = \min(f,g)$ et $\psi = \max(f,g)$ sur I par

$$\forall x \in I, \qquad \phi(x) = \min(f(x), g(x)) \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \max(f(x), g(x)).$$

Montrer que $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont continues en x_0.

On pourra écrire au préalable $\max(x,y)$ *et* $\min(x,y)$*, pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, en termes d'opérations élémentaires et de valeurs absolues.*

III Équations fonctionnelles

Exercice 7. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 1 et vérifiant, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x-1)$. Soit y un réel quelconque. On définit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $y_0 = y$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = \dfrac{1+y_n}{2}$.

1) Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = f(y)$.
3) Caractériser la fonction f.

Exercice 8. Notons $\mathcal{A} = \{g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R},\ g(x^2) = g(x)\}$.

1) Donner un exemple de fonction non constante appartenant à $\mathcal{A}$.
2) Soit f une fonction de $\mathcal{A}$ qui est continue en 0 et en 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{1/2^n})$. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et vérifiant, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$.

1) Montrer que $f(0) = 0$ et que f est impaire.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$. Étendre ce résultat à $n \in \mathbb{Z}$.
3) Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Montrer que $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q} f(1)$.
4) Montrer que f est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
5) Caractériser la fonction f (*on utilisera le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels*).

IV Exercices plus théoriques

Exercice 10. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est périodique et qui admet une limite finie en $+\infty$?

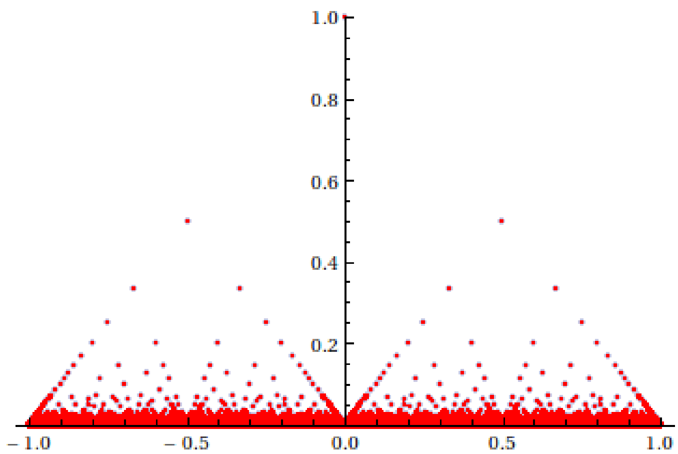
Exercice 11. La fonction de Dirichlet est la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$

1) Montrer que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
   On pourra utiliser le fait que, pour tout réel x_0, il existe une suite de rationnels qui converge vers x_0.
2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{p \to +\infty} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^{2n}(p!x\pi) \right)$.
3) Étudier la continuité de la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \longmapsto xf(x)$.

Exercice 12. La fonction de Thomae est la fonction

$$T : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{q} & \text{si} \quad x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^* \text{ (avec } p \in \mathbb{Z}^* \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \text{ premiers entre eux).} \end{cases}$$

1) Montrer que T est 1-périodique.
2) Montrer que T est discontinue en tout rationnel.
3) Nous allons montrer que T est continue en tout irrationnel.
   a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $A_\varepsilon = \{y \in [0,1] \,|\, T(y) > \varepsilon\}$ est un ensemble fini.
   b) En déduire que, pour tous $\varepsilon > 0$ et $a \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$, il existe $\delta > 0$ tel que $A_\varepsilon \cap [a-\delta, a+\delta] = \varnothing$.
   c) Conclure.



Courbe représentative de la fonction de Thomae sur $]-1,1[$

Exercice 13. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que $0 \in I$ n'est pas une extrémité de 0. Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles. Pour tout $x \in I\backslash\{0\}$, posons $g(x) = \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$. Supposons que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

1) Montrer que l'on peut supposer que $\ell = 0$ (ce que l'on supposera désormais).
2) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I\backslash\{0\}$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(2^{-n}x)}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{g(2^{-k}x)}{2^k}$.
3) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et conclure.