Correction de quelques exercices de la feuille de TD 10

Exercice 3. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Soit X la variable aléatoire finie à valeurs dans $[\![1, ab]\!]$ vérifiant

$$\forall k \in [\![1, ab]\!], \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que X soit bien une variable aléatoire réelle finie ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ et déterminer a et b afin que $\mathbb{E}(X) = 3,5$.

Correction : Dans un premier temps il faut que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$, c'est-à-dire $b \geqslant a$. Un autre condition nécessaire est que $\displaystyle\sum_{k=1}^{ab} \mathbb{P}(X = k) = 1$. Ainsi $ab\big(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\big) = 1$ et donc $b - a = 1$.

Réciproquement on vérifie que, si $a \in \mathbb{N}^*$ et $b = a+1$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{ab} \big(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\big) = 1$ donc l'existence de la variable aléatoire X est avérée. On remarque en fait que X est alors une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, ab]\!]$. Ainsi $\mathbb{E}(X) = \dfrac{ab+1}{2} = \dfrac{a^2+a+1}{2}$. On a $\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}$ si et seulement si $a^2 + a + 1 = 7$, c'est-à-dire $(a-2)(a+3) = 0$. Ainsi $\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}$ si et seulement si $(a, b) = (2, 3)$.

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{c}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Déterminer c puis calculer $\mathbb{E}(X+1)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X+1))$ et $\mathbb{V}(X)$.

Correction : Le réel c doit vérifier $c > 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{c}{k+1}\binom{n}{k}$. Or on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} \qquad \text{(changement de variable } j = k+1\text{)} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - 1\right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi $c = \dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}$. On calcule ensuite :

- D'après la formule de transfert $\mathbb{E}(X+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} c\binom{n}{k} = c\,2^n$. Ainsi, par linéarité, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X+1) - 1 = c\,2^n - 1$.
- D'après la formule de transfert

$$\mathbb{E}(X(X+1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k+1)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} ck\binom{n}{k} = c\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = cn\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = cn\,2^{n-1}.$$

Ainsi, par additivité, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X) = cn\,2^{n-1} - c\,2^n + 1$. Ainsi

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) = cn\,2^{n-1} - c\,2^n + 1 - (c\,2^n - 1)^2 = cn\,2^{n-1} - c^2\,4^n + c\,2^n.$$

Exercice 8. Pour animer une soirée, on a le choix entre deux groupes de rock : l'un composé de quatre musiciens et l'autre de six musiciens. La probabilité qu'un musicien soit indisponible est $p \in]0,1[$, indépendamment des autres musiciens. Un groupe ne peut se produire que si la moitié au moins de ses musiciens est disponible. Quel groupe choisir ?

Correction : Notons X_1 (resp. X_2) le nombre de musiciens absents dans le groupe 1 (resp. 2). Le fait d'être absent (succès) ou à l'heure (échec) pour un musicien est une épreuve de Bernoulli de paramètre p, cet ce indépendamment des autres musiciens. Nous en déduisons que X_1 suit une loi $\mathcal{B}(4,p)$ et X_2 une loi $\mathcal{B}(6,p)$. La probabilité que le groupe 1 se produise est

$$\begin{aligned}P_1 = \mathbb{P}(X_1 \leqslant 2) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k} = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2 \\ &= (1-p)^2\big(1 - 2p + p^2 + 4p - 4p^2 + 6p^2\big) \\ &= (1-p)^2\big(1 + 2p + 3p^2\big)\end{aligned}$$

La probabilité que le groupe 2 se produise est

$$\begin{aligned}P_2 = \mathbb{P}(X_2 \leqslant 3) &= \sum_{k=0}^{3} \binom{6}{k} p^k (1-p)^{6-k} = (1-p)^6 + 6p(1-p)^5 + 15p^2(1-p)^4 + 20p^3(1-p)^3 \\ &= (1-p)^3\big(1 - 3p + 3p^2 - p^3 + 6p - 12p^2 + 6p^3 + 15p^2 - 15p^3 + 20p^3)\big) \\ &= (1-p)^3\big(1 + 3p + 6p^2 + 10p^3\big).\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}P_1 - P_2 &= (1-p)^2\big(1 + 2p + 3p^2\big) - (1-p)^3\big(1 + 3p + 6p^2 + 10p^3\big) \\ &= (1-p)^2\big(1 + 2p + 3p^2 - (1-p)\big(1 + 3p + 6p^2 + 10p^3\big)\big) \\ &= (1-p)^2\big(1 + 2p + 3p^2 - 1 - 3p - 6p^2 - 10p^3 + p + 3p^2 + 6p^3 + 10p^4\big) \\ &= (1-p)^2\big(-4p^3 + 10p^4\big) = 2p^3(1-p)^2(5p-2).\end{aligned}$$

Ainsi :

- Si $p > \frac{2}{5}$, alors $P_1 - P_2 > 0$ donc on préférera le groupe 1.
- Si $p < \frac{2}{5}$, alors $P_1 - P_2 > 0$ donc on préférera le groupe 2.
- Si $p = \frac{2}{5}$, alors $P_1 = P_2$ et il n'y a pas de préférence

Exercice 9. Une urne U_1 contient 6 boules bleues et 5 rouges. Une urne U_2 contient 4 boules bleues et 8 boules rouges. On tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne U_2 que l'on transfère dans l'urne U_1. Ensuite on tire une boule au hasard dans l'urne U_1 et on relève sa couleur.

1) Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de boules bleues transférées. Déterminer la loi de X.
2) Calculer la probabilité que la boule tirée dans l'urne U_1 soit bleue.
3) Calculer la probabilité que l'une au moins des boules transférées soit bleue sachant que la boule tirée est bleue.

Correction :

- Considérons Ω l'ensemble des tirages de deux boules dans l'urne U_2, puis d'une boule dans U_1, muni de $\mathcal{P}(\Omega)$ et de $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité. On a $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{12}{2} \cdot 13 = 66 \cdot 13$. Nous avons $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ et

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\operatorname{card}([X=0]}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\binom{8}{2}\cdot 13}{\binom{12}{2}\cdot 13} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33},$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{\operatorname{card}([X=1]}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}\cdot 13}{\binom{12}{2}\cdot 13} = \frac{32}{66} = \frac{16}{33},$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\operatorname{card}([X=2]}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\binom{4}{2}\cdot 13}{\binom{12}{2}\cdot 13} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}.$$

- Notons B l'événement « Tirer une boule bleue dans U_1 ». La famille $([X=0],[X=1],[X=2])$ est un système complet d'événements donc la formule des probabilités totales entraîne que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}_{[X=0]}(B)\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}_{[X=1]}(B)\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}_{[X=2]}(B)\mathbb{P}(X=2)\\ &= \frac{6}{13}\frac{14}{33}+\frac{7}{13}\frac{16}{33}+\frac{8}{13}\frac{3}{33}=\frac{220}{429}.\end{aligned}$$

- Comme $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, on a $\mathbb{P}_B(X\geqslant 1)=\mathbb{P}_B(X=1)+\mathbb{P}_B(X=2)$. La formule de Bayes entraîne que

$$\mathbb{P}_B(X\geqslant 1)=\frac{\mathbb{P}_{[X=1]}(B)\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(B)}+=\frac{\mathbb{P}_{[X=2]}(B)\mathbb{P}(X=2)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{34}{55}.$$

Exercice 12. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On lance n fois de suite un dé bien équilibré à 6 faces. On note X_n le plus grand des numéros tirés. Déterminer la fonction de répartition de X_n. En déduire la loi de X_n et son espérance.

Correction : On considère $\Omega=[\![1,6]\!]^n$ muni de $\mathcal{P}(\Omega)$ et de $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité. On a $X_n(\Omega)=[\![1,6]\!]$ et

$$\forall k\in[\![1,6]\!],\qquad F_{X_n}(k)=\mathbb{P}(X_n\leqslant k)=\frac{\operatorname{card}([X_n\leqslant k])}{\operatorname{card}(\Omega)}=\frac{k^n}{6^n},$$

puisque $[X\leqslant k]$ est réalisé si et seulement le dé tombe sur un chiffre entre 1 et k à chaque tirage.

Nous en déduisons que $\mathbb{P}(X_n=1)=\mathbb{P}(X\leqslant 1)=\dfrac{1}{6^n}$ et

$$\forall k\in[\![2,6]\!],\qquad \mathbb{P}(X_n=k)=F_{X_n}(k)-F_{X_n}(k-1)=\left(\frac{k}{n}\right)^n-\left(\frac{k-1}{n}\right)^n.$$

Pour calculer l'espérance de X_n, on peut utiliser la formule de l'exercice 6 :

$$\mathbb{E}(X_n)=\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(X_n\geqslant k)=\sum_{k=1}^{6}\big(1-\mathbb{F}_{X_n}(k-1)\big)=6-\sum_{k=1}^{6}\frac{k^n}{6^n}=6-\frac{1+2^n+3^n+4^n+5^n}{6^n}.$$

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\,]0,1[$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :

- le compteur affiche la valeur correcte de X lorsque X prend une valeur comprise entre 1 et $n-1$.
- le compteur affiche un nombre tiré uniformément entre entre 1 et $n-1$ lorsque $X=0$ ou n.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché sur le compteur.

1) Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2) Quelle est la probabilité que le compteur Y affiche la valeur prise par X ?
3) On suppose que n est pair. Sachant que le compteur affiche la valeur $n/2$, quelle est la probabilité que $X=n/2$?

Correction :

1) On a $Y(\Omega)=[\![1,n-1]\!]$. Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. La formule des probabilités totales (appliquée au système complet d'événement associé à X) donne :

$$\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}_{[X=j]}(Y=k)\mathbb{P}(X=j).$$

Nous avons :

- $\mathbb{P}_{[X=0]}(Y=k)=\dfrac{1}{n-1}$ puisqu'on, si $X=0$, on décide alors d'attribuer à Y un nombre choisi uniformément entre 1 et $n-1$.

- $\mathbb{P}_{[X=n]}(Y=k)=\dfrac{1}{n-1}$ puisqu'on, si $X=n$, on décide alors d'attribuer à Y un nombre choisi uniformément entre 1 et $n-1$.
- $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=k)=1$.
- pour tout $j\in[\![1,n-1]\!]\backslash\{k\}$, $\mathbb{P}_{[X=j]}(Y=k)=0$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k)&=\frac{1}{n-1}\mathbb{P}(X=0)+1\cdot\mathbb{P}(X=k)+\frac{1}{n-1}\mathbb{P}(X=n)\\&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}+\frac{p^n+(1-p)^n}{n-1}.\end{aligned}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y)&=\sum_{k=1}^{n-1}k\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{p^n+(1-p)^n}{n-1}\\&=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}-0-n\binom{n}{n}p^n(1-p)^{n-n}+\frac{p^n+(1-p)^n}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}k\\&=np-np^n+\frac{p^n+(1-p)^n}{n-1}\frac{(n-1)n}{2}=n\left(p+\frac{(1-p)^n-p^n}{2}\right).\end{aligned}$$

2) On a $\mathbb{P}(Y=X)=1-\mathbb{P}(Y\neq X)=1-\mathbb{P}(X\in\{0,n\})=1-p^n-(1-p)^n$.

3) La formule de Bayes nous assure que

$$\mathbb{P}_{[Y=\frac{n}{2}]}\left(X=\frac{n}{2}\right)=\frac{\mathbb{P}_{[X=\frac{n}{2}]}\left(Y=\frac{n}{2}\right)\mathbb{P}\left(X=\frac{n}{2}\right)}{\mathbb{P}\left(Y=\frac{n}{2}\right)}=\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}p^{n/2}(1-p)^{n/2}}{\binom{n}{\frac{n}{2}}p^{n/2}(1-p)^{n/2}+\dfrac{p^n+(1-p)^n}{n-1}}.$$

Exercice 14. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, avec $n\geqslant 2$. On effectue n tirages successifs et sans remise. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule dont le numéro est supérieur au numéro de la boule précédente (si cela ne se produit pas au terme des n tirages, alors on pose $X_n=n+1$).

1) Déterminer $\mathbb{P}(X_n>k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
2) En déduire la loi de X_n.
3) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)$.

Correction :

1) On peut supposer que l'on effectue n tirages (jusqu'à ce que l'urne soit vide) si bien que X_n représente le premier tirage dont la boule porte un numéro supérieur ou égal à celui de la boule précédente. On considère donc Ω l'ensemble des tirages, muni de $\mathcal{P}(\Omega)$ et de $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité. On a $\mathrm{card}(\Omega)=n!$.

   On remarque que $X_n(\Omega)=[\![2,n+1]\!]$. Si $k\in[\![2,n]\!]$, alors $\mathbb{P}(X>k)=\dfrac{\mathbb{P}([X>k])}{\mathbb{P}(\Omega)}$. L'événement $[X>k]$ est réalisé si et seulement si les k premiers tirages sont rangés par ordre strictement décroissant. Il y $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k numéros en question, puis une seule façon de les ranger par ordre décroissant. Enfin il y a $(n-k)!$ façons de choisir les $n-k$ dernières boules. Nous en déduisons que $\mathrm{card}([X>k])=\binom{n}{k}(n-k)!$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X>k)=\frac{\binom{n}{k}(n-k)!}{n!}=\frac{1}{k!}.$$

   On a aussi $\mathbb{P}([X>n+1])=\mathbb{P}(\varnothing)=0$.

2) Nous en déduisons que

$$\forall k \in [\![3, n]\!], \qquad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!},$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \mathbb{P}(X > 2) = 1 - \frac{1}{2!} = \frac{2-1}{2!} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X = n+1) = \mathbb{P}(X > n) = \frac{1}{n!}.$$

3) Enfin

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + \frac{n+1}{n!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + \frac{n+1}{n!} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} + \frac{n+1}{n!}.$$

On obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = e.$