Feuille d'exercice n° 10

Variables aléatoires réelles finies

Exercice 1. On joue au jeu suivant : on lance deux dés équilibrés à 6 faces. Si aucune des faces ne vaut 6, alors on gagne le produit des deux chiffres obtenus en euros. Si une au moins des faces vaut 6, alors on ne gagne rien. Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise ce jeu et définir une variable aléatoire X qui donne le gain de ce jeu. Donner la loi de X sous la forme d'un tableau. Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 5), \qquad \mathbb{P}(21 \leqslant X < 25), \qquad \mathbb{P}(X > 18) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \in \{10, 12, 14\}).$$

Tracer la fonction de répartition de X.

Exercice 2. Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k < n$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

1) On tire successivement et sans remise k boules de l'urne et on note X le plus grand des numéros tirés. Donner un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience et définir proprement la variable aléatoire X comme fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Déterminer la loi de X.

   Indication : on pourra d'aider de la fonction de répartition de X.

2) Même question avec des tirages successifs avec remise de k boules.
3) a) Même question avec un tirage simultané de k boules.

   b) Retrouver la formule de Pascal généralisée : $\displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{j-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

Exercice 3. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Soit X la variable aléatoire finie à valeurs dans $[\![1, ab]\!]$ vérifiant

$$\forall k \in [\![1, ab]\!], \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que X soit bien une variable aléatoire réelle finie ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ et déterminer a et b afin que $\mathbb{E}(X) = 3,5$.

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{c}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Déterminer c puis calculer $\mathbb{E}(X+1)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X+1))$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire réelle de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0, 1[$. Déterminer de deux façons différentes la loi de $Y = n - X$.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k).$$

Exercice 7. Un chercheur de l'université Paris-Sud se rend deux à trois fois par semaine à Paris (20 trajets sur le mois) avec le RER B. D'après des statistiques, un train sur trois accuse un retard. Quelle est la probabilité que ce francilien arrive en retard au plus cinq fois en un mois ?

Exercice 8. Pour animer une soirée, on a le choix entre deux groupes de rock : l'un composé de quatre musiciens et l'autre de six musiciens. La probabilité qu'un musicien soit indisponible est $p \in]0,1[$, indépendamment des autres musiciens. Un groupe ne peut se produire que si la moitié au moins de ses musiciens est disponible. Quel groupe choisir ?

Exercice 9. Une urne U_1 contient 6 boules bleues et 5 rouges. Une urne U_2 contient 4 boules bleues et 8 boules rouges. On tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne U_2 que l'on transfère dans l'urne U_1. Ensuite on tire une boule au hasard dans l'urne U_1 et on relève sa couleur.

1) Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de boules bleues transférées. Déterminer la loi de X.
2) Calculer la probabilité que la boule tirée dans l'urne U_1 soit bleue.
3) Calculer la probabilité que l'une au moins des boules transférées soit bleue sachant que la boule tirée est bleue.

Exercice 10 (loi des tirages avec ou sans remise). Soient n, r et N dans $\mathbb{N}^*$ avec $r < N$ et $n \leqslant N$. Une urne contient N boules dont r rouges et $b = N - r$ bleues. On pose $p = \dfrac{r}{N}$.

1) On tire successivement avec remise n boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues. Montrer que R suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   On dit que la loi binomiale est la loi des tirages avec remise.
2) Désormais on tire successivement sans remise n boules dans l'urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues.
   a) Donner un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience et déterminer $X(\Omega)$.
   b) Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = \dbinom{pN}{k}\dbinom{(1-p)N}{n-k} \Big/ \dbinom{N}{n}$.

      On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p. On la note $\mathcal{H}(N, n, p)$. On dit aussi que la loi hypergéométrique est la loi des tirages sans remise.
   c) Retrouver la formule de Vandermonde : si a, b, n sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant n \leqslant a + b$, alors
   $$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$
   d) En utilisant la formule de Vandermonde, montrer que $\mathbb{E}(X) = np$.

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

1) Montrer que $Y = \dfrac{1}{1+X}$ est une variable aléatoire réelle finie et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2) Soit $z \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $Z = z^X$ est une variable aléatoire réelle finie et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois de suite un dé bien équilibré à 6 faces. On note X_n le plus grand des numéros tirés. Déterminer la fonction de répartition de X_n. En déduire la loi de X_n et son espérance.

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :

- le compteur affiche la valeur correcte de X lorsque X prend une valeur comprise entre 1 et $n-1$.
- le compteur affiche un nombre tiré uniformément entre entre 1 et $n-1$ lorsque $X = 0$ ou n.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché sur le compteur.

1) Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2) Quelle est la probabilité que le compteur Y affiche la valeur prise par X ?
3) On suppose que n est pair. Sachant que le compteur affiche la valeur $n/2$, quelle est la probabilité que $X = n/2$?

Exercice 14. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geqslant 2$. On effectue n tirages successifs et sans remise. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule dont le numéro est supérieur au numéro de la boule précédente (si cela ne se produit pas au terme des n tirages, alors on pose $X_n = n+1$).

1) Déterminer $\mathbb{P}(X_n > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2) En déduire la loi de X_n.
3) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 15. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on obtient un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1) Justifier que Y_n est une variable aléatoire réelle finie qui prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
2) Déterminer $\mathbb{P}(Y_n > k)$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$.
3) En déduire que, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}(Y_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.
4) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.

Exercice 16. Un gardien doit ouvrir une porte dans le noir à l'aide d'un trousseau de dix clés dont une seule convient. Deux méthodes s'offrent à lui :

— Méthode A (lorsqu'il est sobre) : il essaie les clés l'une après l'autre.

— Méthode B (lorsqu'il est ivre) : il essaie une clé, agite le trousseau, puis recommence au plus dix fois. S'il n'a pas ouvert la porte, alors il retourne se coucher.

On note X_A (resp. X_B) le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte avec la méthode A (resp. la méthode B). On pose $X_B = 11$ s'il n'arrive pas à ouvrir la porte après dix essais.

1) Déterminer la loi de X_A et calculer $\mathbb{P}(X_A > 8)$ et $\mathbb{E}(X_A)$.
2) Déterminer la loi de X_B et calculer $\mathbb{P}(X_B > 8)$.
3) Un cambrioleur caché à l'intérieur sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Le gardien a déjà échoué huit fois à ouvrir la porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?