TD 10 - Exercices supplémentaires

Exercice 1. On lance deux fois de suite un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros tirés. Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance.

Correction : La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[\![1,6]\!]$. Puisqu'il s'agit d'un max, on pense à l'astuce d'utiliser la fonction de répartition. Pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, $[X \leqslant k]$ est réalisé si et seulement si les deux dés affichent un numéro inférieur ou égal à k. On peut faire l'hypothèse que les deux dés sont indépendants. Ainsi $\mathbb{P}(X \leqslant k) = \left(\dfrac{k}{6}\right)^2$. On en déduit que

$$\forall k \in [\![1,6]\!], \qquad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1) = \frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36}.$$

On calcule ensuite

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k\frac{2k-1}{36} = \frac{1}{18}\sum_{k=1}^{6} k^2 - \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{18}\frac{6(6+1)(2\cdot 6+1)}{6} - \frac{1}{36}\frac{6(6+1)}{2} = \frac{7\cdot 13}{18} - \frac{7\cdot 3}{36} = \frac{161}{36}.$$

On calcule de même que $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{791}{36}$ et donc, d'après la formule de Huygens Koenig, $\mathbb{V}(X) = \dfrac{2555}{1296}$.

Exercice 2. Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, \dots, n, \dots$ de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ, la puce se situe sur la case 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n et Y_n les variables aléatoires représentant respectivement le numéro de la case où se trouve la puce après n sauts et le nombre de sauts d'une case effectués au cours des n premiers sauts.

1) Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2) Exprimer X_n en fonction de Y_n. En déduire la loi de X_n.
3) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Correction :

1) La variable aléatoire Y_n compte le nombre de succès (faire un saut d'une case) dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques (consistant à faire un saut d'une case - succès - ou de deux cases - échec) et indépendantes. Ainsi Y_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$ (puisque l'on saut d'une case ou de deux cases de façon équiprobable). On a $\mathbb{E}(Y_n) = \dfrac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(Y_n) = \dfrac{n}{4}$.
2) En n sauts, la puce fait Y_n saut d'une case et $n - Y_n$ sauts de deux cases. Ainsi $X_n = 1 \times Y_n + 2 \times (n - Y_n) = 2n - Y_n$. Ainsi X_n prend ses valeurs dans $[\![n, 2n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$,
$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y_n = 2n-k) = \binom{n}{2n-k} p^{2n-k}(1-p)^{n-2n+k} = \binom{n}{k-n} p^{2n-k}(1-p)^{k-n}.$$
3) On a $\mathbb{E}(X_n) = 2n - \mathbb{E}(Y_n) = 2n - \dfrac{n}{2} = \dfrac{3n}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(Y_n) = \dfrac{n}{4}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire successivement une à une, sans remise, les boules de cette urne. Soit X le nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir toutes les boules blanches.

1) Expliciter un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience. Préciser le cardinal de Ω.
2) Donner $X(\Omega)$ puis montrer que $F_X(k) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\dbinom{k}{n}$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
3) En déduire la loi de X.

4) Calculer l'espérance de X.
On pourra utiliser, sans la redémontrer, la formule de Pascal généralisée : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in [\![0, m]\!], \qquad \sum_{k=p}^{m} \binom{k}{p} = \binom{m+1}{p+1}.$$

Correction :

1) On peut numéroter les boules de 1 à $2n$. On considère Ω l'ensemble des tirages successifs sans remise des $2n$ boules, muni de $\mathcal{P}(\Omega)$ et de $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité. On a $\mathrm{card}(\Omega) = (2n)!$.
2) Il faut au moins n tirages pour tirer toutes les boules blanches. Au pire il faudra $2n$ tirages (si la toute dernière boule tirée est blanche). Ainsi $X(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$. Soit $k \in [\![n, 2n]\!]$. L'événement $[X \leqslant k]$ est réalisé si et seulement si toutes les boules blanches sont tirées avant le $k^{\text{ième}}$ tirage. Obtenir un tel tirage revient à choisir les instants de tirage des n boules blanches parmi les k premiers tirages (il y en a $\binom{n}{k}$), de choisir l'ordre de sortie des boules blanches (il y en a $n!$) puis l'ordre de sortie des boules noires (il y en a $n!$). Ainsi

$$F_X(k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) = \frac{\mathrm{card}([X \leqslant k])}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\binom{k}{n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

3) On en déduit que, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\left(\binom{k}{n} - \binom{k-1}{n}\right) = \frac{\binom{k-1}{n-1}(n!)^2}{(2n)!},$$

d'après la formule de Pascal. On a aussi $\mathbb{P}(X = n) = F_X(n) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{\binom{n-1}{n-1}(n!)^2}{(2n)!}$.

4) On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=n}^{2n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=n}^{2n} k\binom{k-1}{n-1} = \sum_{k=n}^{2n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=n}^{2n} n\binom{k}{n}.$$

D'après la formule de Pascal généralisée, on a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, n\binom{2n+1}{n+1} = \frac{n(2n+1)}{n+1}.$$

Exercice 4. Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules bleues. On vide l'urne en effectuant des tirages successifs et sans remise. Soit r un entier compris entre 1 et 10. On vide l'urne et on note X_r le numéro du tirage pour lequel on obtient la $r^{\text{ième}}$ boule blanche. Montrer que $X_r(\Omega) = [\![r, r+5]\!]$ et déterminer la loi de X_r.

Correction : On peut numéroter les boules rouges de 1 à 10 et les boules bleues de 11 à 15. On modélise cette expérience par l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec Ω l'ensemble des tirages successifs sans remise de 15 boules de l'urne (que l'on code par une permutation des 15 numéros) et $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité. On a $\mathrm{card}(\Omega) = 15!$.

Soit $k \in [\![1, 15]\!]$. Si tire la $r^{\text{ième}}$ boule rouge à l'instant k, alors $k \geqslant r$. Il reste alors $10 - r$ boules rouges parmi $10 - k$ boules. Par conséquent $10 - r \leqslant 15 - k$, c'est-à-dire $k \leqslant r + 5$. Ainsi $X_r(\Omega) = [\![r, r+5]\!]$.

Soit $k \in [\![r, r+5]\!]$. Un tirage réalisant l'événement $[X = k]$ est entièrement déterminé par

— le choix des instants de tirage des $r - 1$ premières boules rouges parmi les $k - 1$ premiers tirages (il y a en a $\binom{k-1}{r-1}$),

— le choix des instants de tirage des $10 - r$ premières boules rouges parmi les $15 - k$ premiers tirages (il y a en a $\binom{15-k}{10-r}$),

— le choix de l'ordre de sortie des 10 boules rouges parmi les 10 instants choisis (il y en a $10!$),

— le choix de l'ordre de sortie des 5 boules bleues parmi les 5 instants restants (il y en a $5!$).

Ainsi

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\operatorname{card}([X=k])}{\operatorname{card}(\Omega)}=\frac{\binom{k-1}{r-1}\binom{15-k}{10-r}10!5!}{15!}=\frac{\binom{k-1}{r-1}\binom{15-k}{10-r}}{\binom{15}{5}}.$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une boite $\mathcal{B}$ contenant n boules numérotées de 1 à n, et de n boites $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_n$ telles que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la $k^{\text{ème}}$ boule contient k boules numérotées de 1 à k. On tire au hasard une boule dans $\mathcal{B}$. Si le numéro de la boule tirée est $k \in [\![1,n]\!]$, on tire au hasard une boule dans $\mathcal{B}_k$. On note X le numéro de la boule obtenue à l'issue du deuxième tirage.

1) Notons Y le numéro de la boule obtenue à l'issue du premier tirage. Soit $(k,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Calculer $\mathbb{P}([Y=k]\cap[X=j])$.
2) En déduire la loi de X.
3) Calculer l'espérance et la variance de X.

Correction :

1) Pour tout $(k,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y=k]\cap[X=j]) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j>k \\ \dfrac{1}{kn} & \text{si} \quad j\leqslant k\end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j>k \\ \dfrac{1}{kn} & \text{si} \quad j\leqslant k\end{cases}\end{aligned}$$

2) La variable aléatoire réelle finie X prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Soit $j\in[\![1,n]\!]$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $([Y=j])_{1\leqslant j\leqslant n}$ de probabilités non nulles, on obtient

$$\mathbb{P}(X=j)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}([Y=k]\cap[X=j])=\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{kn}=\frac{1}{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k}.$$

Il n'existe pas de formule plus simple pour calculer cette somme.

3) On a

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X=j)=\sum_{j=1}^{n} j\frac{1}{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{j}{k}=\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}\frac{j}{k}.$$

On peut aussi calculer cette somme double en sommant d'abord sur k puis que j, d'après le théorème de Fubini :

$$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n+1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{n+3}{4}.$$

Ensuite calculons la variance. La formule de transfert entraîne que

$$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{j=1}^{n} j^2\mathbb{P}(X=j)=\sum_{j=1}^{n} j^2\frac{1}{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{j^2}{k}=\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}\frac{j^2}{k}$$

et donc

$$\mathbb{E}(X^2)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{j^2}{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{1}{6n}\sum_{k=1}^{n}(2k^2+3k+1).$$

Ainsi

$$E(X^2)=\frac{1}{6n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3n(n+1)}{2}+n\right)=\frac{4n^2+15n+17}{36}.$$

Enfin la formule de Huygens-Koenig entraine que

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\frac{7n^2+6n-13}{144}.$$