Feuille d'exercice n° 1

Logique et raisonnements

I Éléments de logique

Exercice 1. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. Montrer que :

1) $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}))$ (ou est distributive sur et),
2) $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$ (et est distributive sur ou).

Exercice 2. Décrire les parties $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, P(x)\}$ de $\mathbb{R}$ quand $P(x)$ est la proposition :

1) $(x > 1 \text{ et } x < 2) \text{ ou } (x = 1)$.
2) $x > 1 \text{ et } x < 6 \text{ et } x \neq 3$.
3) $(x \leqslant 1 \text{ et } x > 2) \text{ ou } (x = -5)$.
4) $x \leqslant 1 \implies x \leqslant 0$.

Exercice 3. Écrire la négation des phrases suivantes :

1) $x > 3 \implies f(x) \leqslant 5$
2) $-4 \leqslant x < 2$.
3) $y < -3 \text{ ou } y > 12$.
4) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$.
5) $(x > -1 \text{ et } f(x) = 0) \text{ ou } (x \leqslant -1 \text{ et } g(x) = 0)$.
6) Tous les élèves de moins de quinze ans ou de plus de dix-huit ans ont une note comprise entre 8 et 15.
7) $\exists! z \in E, g(z) = 0$.
8) Il n'a plu qu'un seul jour cette semaine.

Exercice 4. Pour chacune des propositions suivantes, étudier si elle est vraie ou fausse et écrire sa négation. Rédiger également en français chaque proposition si elle est vraie, sa négation si elle est fausse.

1) $\exists y \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, xy = 1$.
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geqslant n_0 \implies \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon\right)$.
3) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \big(x^n = y^n \text{ et } x \neq y\big)$.
4) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists k \in \mathbb{N}, x^k \geqslant 2$.

Exercice 5. Traduire avec des quantificateurs les phrases suivantes :

1) La fonction sinus est à valeurs dans $[-1,1]$.
2) Tout nombre complexe égal à son conjugué est un nombre réel.
3) L'équation $\ln(x) - x + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
4) L'exponentielle de tout réel est strictement positive.
5) La fonction polynômiale $P : x \longmapsto x^2 + x + 1$ n'admet pas de racine réelle.

Exercice 6. Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en langage mathématique les phrases suivantes, puis les nier :

1) f est strictement croissante.
2) f est minorée par le réel m.
3) f est majorée.
4) f est la fonction nulle.
5) f s'annule.
6) f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 7. Donner un exemple de fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles vérifiant chacune des propriétés suivantes :

1) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$.
2) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant M$.
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$.

Exercice 8. Pour chacune des questions suivantes, mettre le bon signe ($\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$) entre les deux propriétés P et Q.

1) P : « $\sin(x) = 0$ ». Q : « $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$ ».
2) P : « $2x - 5 = x^5 - 3x$ ». Q : « $e^{x^5} = \left(e^{x-1}\right)^5$ ».
3) P : « $z \in \mathbb{C}$ ». Q : « $\exists r \in \mathbb{R}_+^*, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = re^{i\theta}$ ».
4) P : « n est divisible par 9 ». Q : « n n'est pas un nombre premier ».
5) P : « $\mathbb{P}(A) \neq 0$ ». Q : « $\mathbb{P}(A) > 0$ ».

Ici A est un événement et $\mathbb{P}(A)$ désigne sa probabilité.

II Raisonnements usuels

Exercice 9. Montrer les propositions suivantes :

1) Si a et b sont deux entiers tels que $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *(on admet que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)*.
2) Soit n un entier naturel. Montrer que, si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
3) Soit x un réel. Montrer l'implication : $\big(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leqslant \varepsilon\big) \ \Rightarrow\ x = 0$.
4) Si x est un irrationnel positif, alors $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 10. Dans le plan, on considère $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ des cercles de rayon 1 et de centres respectifs $A(a, \alpha)$ et $B(b, \beta)$. On rappelle que la distance entre A et B est donnée par la formule

$$d(A, B) = \sqrt{(a-b)^2 + (\alpha - \beta)^2}.$$

On note P la proposition « Les cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ s'intersectent » et Q la proposition « $d(A, B) \leqslant 2$ ».

1) Écrire en français ce que signifient :
   a) la contraposée de l'implication $Q \Rightarrow P$,
   b) la réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$,
   c) la contraposée de la réciproque de l'implication $P \Leftarrow Q$.
2) Écrire avec des quantificateurs la proposition P, puis sa négation.
3) Ecrire le début de la rédaction des raisonnements suivants :
   a) Prouver $Q \Rightarrow P$ par contraposée.
   b) Prouver $P \Rightarrow Q$ par l'absurde
   c) Prouver la contraposée de la réciproque de $Q \Rightarrow P$ par l'absurde.

Exercice 11. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par analyse/synthèse, que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 12. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $a_n = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.
On rappelle qu'un entier a est divisible par un entier b si il existe un entier c tel que $a = bc$.

Exercice 13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $p_1, \ldots, p_k$ des nombres premiers. Montrer que l'entier $N = 1 + p_1 p_2 \ldots p_k$ n'est divisible par aucun des p_i, $1 \leqslant i \leqslant k$. En déduire, par l'absurde, qu'il existe une infinité de nombres premiers.