Corrigé de l'interrogation écrite 007

1) On a

- $\tan(x) \underset{0^+}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + o(x^7)$,
- $\ln(1+x) \underset{0^+}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$,

donc

$$\begin{aligned}\tan(x) - \ln(1+x) &\underset{0^+}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{5}\right) x^5 + \frac{x^6}{6} + \left(\frac{17}{315} - \frac{1}{7}\right) x^7 + o(x^7) \\ &\underset{0^+}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{6} - \frac{4x^7}{45} + o(x^7).\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{f(x) \underset{0^+}{=} \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{15} + \frac{x^4}{6} - \frac{4x^5}{45} + o(x^5).}$$

2) On a $\cos(x) \underset{0^+}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ et

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[4]{1-4x}} = (1-4x)^{-1/4} &\underset{0^+}{=} 1 + \left(-\frac{1}{4}\right)(-4x) + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4} - 1\right)\frac{(-4x)^2}{2} \\ &\qquad + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4} - 1\right)\left(-\frac{1}{4} - 2\right)\frac{(-4x)^3}{3!} + o(x^3) \\ &\underset{0^+}{=} 1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{15x^3}{2} + o(x^3)\end{aligned}$$

D'où

$$g(x) \underset{0^+}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{15x^3}{2} + o(x^3)\right) \underset{0^+}{=} 1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{15x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

et donc

$$\boxed{g(x) \underset{0^+}{=} 1 + x + 2x^2 + 7x^3 + o(x^3).}$$

3) On a $\sin(\pi + h) = -\sin(h) \underset{h \to 0}{=} -h + \dfrac{h^3}{6} - \dfrac{h^5}{120} + o(h^6)$ si bien que

$$\boxed{\sin(x) \underset{x \to \pi}{=} -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{6} - \frac{(x-\pi)^5}{120} + o((x-\pi)^6).}$$

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h(x) = \sqrt{x^4\left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x} + 1\right)}\left(e^{-2/x} - 1\right) = x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}}\left(e^{-2/x} - 1\right).$$

Vu le x^2, il faut aller au moins jusqu'à l'ordre 3. Puisque $\dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on a :

$$e^{-2/x} - 1 \underset{+\infty}{=} \frac{-2}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{x}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{-2}{x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

et

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}} \underset{+\infty}{=} 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)^2\frac{1}{2!}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)^3\frac{1}{3!}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
$$\underset{+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
h(x) &\underset{+\infty}{=} x^2\left(-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\
&\underset{+\infty}{=} x^2\left(-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\
&\underset{+\infty}{=} x^2\left(-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{3x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\
&\underset{+\infty}{=} x^2\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{12x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\
&\underset{+\infty}{=} -2x+1-\frac{1}{12x}+o\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\boxed{\mathscr{C}_h \text{ admet la droite d'équation } y=-2x+1 \text{ pour asymptote en } +\infty}$. De plus $h(x)-(-2x+1) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12x}$ donc, $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty\text{ , } \mathscr{C}_h \text{ est en dessous de sa tangente.}}$

5) Posons $\varphi : x \longmapsto 3x\cos(x)+\ln(1-3x^3)-\sin(3x)$. On a

- $3x\cos(x) \underset{0}{=} 3x-\frac{3x^3}{2}+\frac{3x^5}{4!}+o(x^5) \underset{0}{=} 3x-\frac{3x^3}{2}+\frac{x^5}{8}+o(x^5)$,
- $\ln(1-3x^3) \underset{0}{=} -3x^3+o(x^5)$,
- $-\sin(3x) \underset{0}{=} -3x-\frac{(-3x)^3}{3!}+\frac{(-3x)^5}{5!}+o(x^5) \underset{0}{=} -3x+\frac{9x^3}{2}-\frac{81x^5}{40}+o(x^5)$.

Ainsi

$$\varphi(x) \underset{0}{=} \frac{x^5}{8}-\frac{81x^5}{40}+o(x^5) \underset{0}{=} \frac{5-81}{40}x^5+o(x^5) \underset{0}{=} -\frac{19}{10}x^5+o(x^5)$$

Puisque $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient

$$u_n=\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{-19}{10n^5}+o\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Nous en déduisons que $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-19}{10n^5}.}$